

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής (5 μονάδες)

A2. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = k, k > 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = k$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -k$ ». Να

χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (1+4 μονάδες)

A3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = 0$ ». Να

χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (1+4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς.

α. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

β. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2} = +\infty$

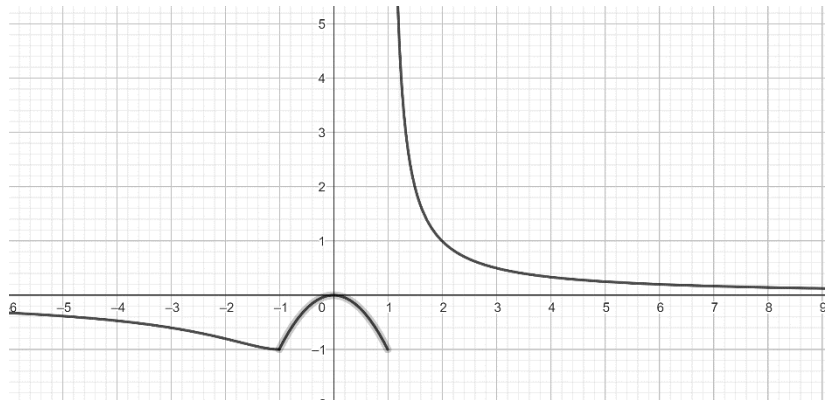
γ. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

δ. Το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x + \eta\mu x} \right)$ δεν υπάρχει.

ε. Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(a^{\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}} \right) = 1$, για κάθε $a > 0$ (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να βρείτε όσα από τα παρακάτω όρια υπάρχουν ή να δικαιολογήσετε τη μη ύπαρξη τους.



B1. a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1)}{f(x)}$ b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(0)}{x}$ c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(1)}$

d. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(1) - f(2)}{f(x)}$ e. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x) + 2}{x}$

(10 μονάδες)

B2. a. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{|f(x)|}}$ b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x)$ (6 μονάδες)

B3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x+6} - 4}$ (9 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4} + ax - 1, a \in \mathbb{R}$, για την οποία $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k, k \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, την τιμή του a και την τιμή του k. (2+3+3 μονάδες)

Για $a = -1$:

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)}{\sqrt{x+2} + x}$ (6 μονάδες)

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \cdot \eta\mu \frac{3}{f(x)})$ (6 μονάδες)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)+1} - 5 \cdot 2^{f(x)}}{3^{f(x)} + 4^{f(x)+1}}$ (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = 2$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω

όρια:

Δ1. a. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 3}{x^2 - 1}$ c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 - 3) - x^2 + 1}{x^2 - 4}$ (3+4+5 μονάδες)

Δ2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu^2(f(x) - 3)}{\sigma\upsilon\nu(f(x) - 3) - 1}$ (7 μονάδες)

Δ3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 + x - 5) - 3}{x^2 - 3x + 2}$ (6 μονάδες)