

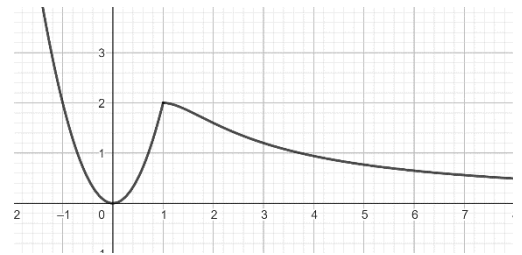
ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης. (4 μονάδες)
- A2.** Πότε μια συνάρτηση είναι 1-1; Να γράψετε τον ορισμό και το τι σημαίνει αυτό για τη γραφική της παράσταση. (4+3=7 μονάδες)
- A3.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν πεδίο ορισμού όλο το \mathbb{R} και είναι f γνήσια αύξουσα και g γνήσια φθίνουσα, τότε η συνάρτηση $(g-f)$ είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} ». Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε το χαρακτηρισμό. (1+3=4 μονάδες)
- A4.** Χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
- α. Η ισοδυναμία $f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x$ ισχύει μόνο εφόσον η f είναι 1-1.
- β. Μια ευθεία της μορφής $x=a$, a πραγματικός, μπορεί να τέμνει τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης σε ένα το πολύ σημείο.
- γ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα σε δύο διαστήματα Δ_1 και Δ_2 , τότε είναι γνήσια αύξουσα και στο $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.
- δ. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι γνήσια φθίνουσες στο \mathbb{R} , τότε η σύνθεσή τους είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} .
- ε. Αν η f είναι γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα A , τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα το πολύ σημείο. (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Στο σχήμα, βλέπετε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f . (2+2+3=7 μονάδες)
- B2.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=a$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a . (5 μονάδες)
- B3.** Να διατάξετε τους αριθμούς $f(-\pi), f(e), f(2024)$ από τον μικρότερο προς το μεγαλύτερο. (3 μονάδες)



Δίνεται επιπλέον ότι $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & x < 1 \\ \frac{4x}{x^2 + 1}, & x \geq 1 \end{cases}$.

- B4.** Να δικαιολογήσετε ότι η f είναι 1-1 για κάθε $x \geq 1$ και να βρείτε την αντίστροφή της για το διάστημα αυτό. (1+9=10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} για τις οποίες επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

• Η $(f \circ g)$ είναι 1-1 • $g(e^x + x - f(x)) = g(2 - e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1 και να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. (3+3=6 μονάδες)
- Γ2.** Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f και να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$ (3+6=9 μονάδες)
- Γ3.** Αν γνωρίζετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το \mathbb{R} , να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(2x) \geq \ln x$, $x \in (0, +\infty)$ (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει: $\ln f(x) + f(x) = e^x + x$, $x \in (0, +\infty)$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x$, $x \in (0, +\infty)$. (10 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g , όπου $g(x) = \begin{cases} f(2\ln x) + 1, & x > 1 \\ (x-1)^3 + 2, & x \leq 1 \end{cases}$ είναι 1-1 **(7 μονάδες)**

Δ3. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης g , αν γνωρίζετε ότι $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ **(8 μονάδες)**