Επ2 - 2324 - Απαντήσεις

Α3. Αληθής. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow$ $-f(x_1) > -f(x_2)$ και $g(x_1) > g(x_2)$ και με κατά μέλη πρόσθεση έχουμε $(g-f)(x_1) > (g-f)(x_2)$ άρα η $(g-f)$ γν. φθίν.

Α4. Σωστό — Σωστό — Λάθος — Σωστό — Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πεδίο ορισμού $= \mathbb{R}$ Συν. τιμών $= [0, +\infty)$. Επίσης,
$f \searrow$ στα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$ ενώ $f \nearrow$ στο $[0, 1]$.

Β2. Αν $\alpha < 0$ είναι αδύνατη.
Αν $\alpha = 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση.
Αν $0 < \alpha < 2$ η εξίσωση έχει τρεις ρίζες.
Αν $\alpha = 2$ έχει δύο ρίζες
Αν $\alpha > 2$ έχει μοναδική ρίζα.

Β3. Επειδή $f(-\pi) > 2$ και $f \searrow$ στο $[1, +\infty)$, $f(e) > f(2024)$
άρα $f(2024) < f(e) < f(-\pi)$

Β4. Για $x \geq 1$ η f είναι 1-1 (με βάση το σχήμα), άρα υπάρχει η f^{-1} με πεδίο ορισμού το $(0, 2]$ και σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$.

$y = \dfrac{4x}{x^2+1} \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0$. $\Delta = 16 - 4y^2 = 4(4-y^2) \geq 0$ αφού $y \in [0, 2]$. Οι ρίζες της είναι $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{4-y^2}}{2y} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-y^2}}{y}$

Δεκτή λύση εφόσον ανήκει στο $[1, +\infty)$.

Είναι $\dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{4-y^2} \geq y-2$ που ισχύει γιατί $y - 2 < 0$

$\dfrac{2-\sqrt{4-y^2}}{y} \geq 1 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{4-y^2} \geq y \Leftrightarrow 2 - y \geq \sqrt{4-y^2}$ άρα

$4 - 4y + y^2 \geq 4 - y^2 \Leftrightarrow 2y^2 - 4y \geq 0 \Leftrightarrow 2y(y-2) \geq 0$, άτοπο

Συνεπώς, δεκτή λύση η $x = \dfrac{2+\sqrt{4-y^2}}{y}$ συνεπώς

$$f^{-1}(x) = \frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}, \quad x \in (0, 2].$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω ότι $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow (f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2) \underset{\substack{f\circ g\\ 1-1}}{\Leftrightarrow} x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1.

Από τη σχέση $g(e^x+x-f(x))=g(2-e^x) \underset{g\ 1-1}{\Leftrightarrow} e^x+x-f(x)=2-e^x$

άρα $f(x)=2e^x+x-2$

Γ2. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ άρα $f \nearrow$.

Είναι $f(x)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(0) \underset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} x<0$

Γ3. $f^{-1}(2x)\ge \ln x \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} 2x\ge f(\ln x) \Leftrightarrow 2x\ge 2x+\ln x-2$

$\Leftrightarrow \ln x\le 2 \Leftrightarrow x\le e^2$ άρα $x\in(0,e^2]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g_1(x)=\ln x+x$. Η $g_1 \nearrow$ στο $(0,+\infty)$ και η δοσμένη εξίσωση γίνεται: $\ln f(x)+f(x)=e^x+x \Leftrightarrow$

$g_1(f(x))=g_1(e^x) \underset{1-1}{\overset{g_1\nearrow}{\Leftrightarrow}} f(x)=e^x$.

Δ2. Είναι $f(2\ln x)+1=e^{2\ln x}+1=x^2+1$, συνεπώς

$$g(x)=\begin{cases} x^2+1, & x>1\\ (x-1)^3+2, & x\le 1.\end{cases}$$

Έστω $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ με $x_1<x_2\Rightarrow\dots$
$\Rightarrow x_1^2+1<x_2^2+1 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$
δηλ. $g\nearrow$ στο $(1,+\infty)$.

Ομοίως, αν $x_1,x_2\in(-\infty,1]$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1-1<x_2-1\Rightarrow$
$(x_1-1)^3<(x_2-1)^3 \Rightarrow g(x_1)<g(x_2)$ άρα $g\nearrow$ στο $(-\infty,1]$.

Επίσης, $(x-1)^3+2\le 2$ ενώ $x^2+1\ge 2$ άρα g 1-1 στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Θέτω $y=x^2+1$, $y\in[2,+\infty) \Rightarrow x^2=y-1 \Rightarrow x=\sqrt{y-1}$

Επίσης, αν $y=(x-1)^3+2$, $y\le 2 \Rightarrow y-2=(x-1)^3 \Rightarrow$

$x-1=-\sqrt[3]{2-y} \Rightarrow x=1-\sqrt[3]{2-y}$. Συνεπώς,

$$g^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x\ge 1\\ 1-\sqrt[3]{2-x}, & x<1.\end{cases}$$