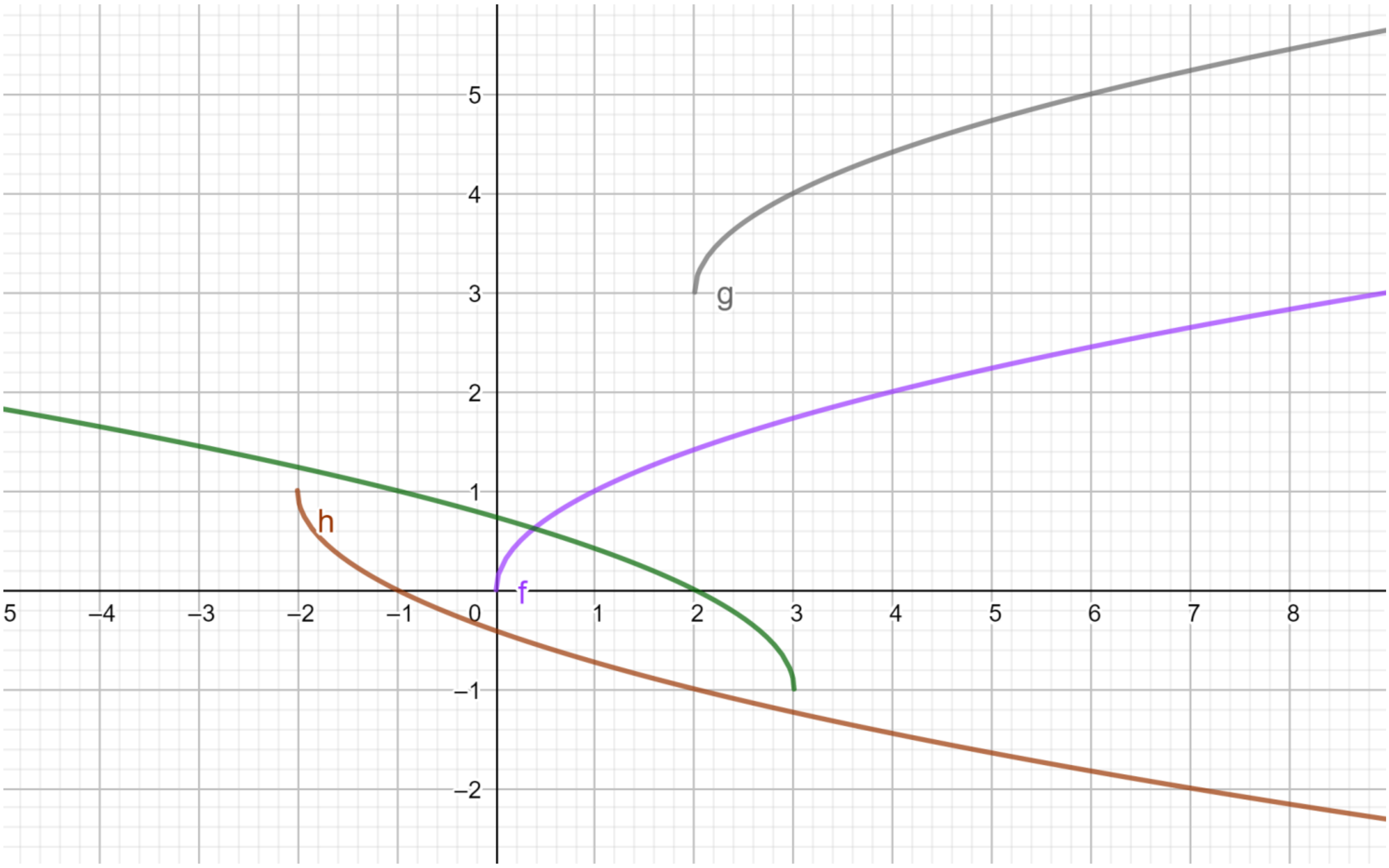
<u>ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ</u>

<u>ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ</u>

Ας υποθέσουμε, για όλες τις παρακάτω περιπτώσεις, ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) είναι γνωστή και έχει χαραχθεί. Το θέμα μας είναι να χαράξουμε τις:

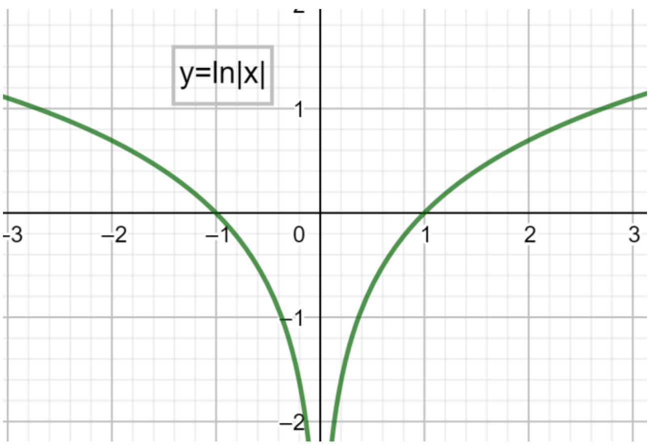
- g(x)=f(x)+k, k πραγματικός. Η γραφική παράσταση προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση κάθε σημείου της f κατά k μονάδες προς τα πάνω αν k>0 ή προς τα κάτω αν k<0.
- g(x)=f(x-α), α πραγματικός. Η γραφική παράσταση προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση κάθε σημείου της f κατά α μονάδες προς τα δεξιά αν α>0 ή προς τα αριστερά αν α<0.
- g(x)=-f(x). Η γραφική παράσταση είναι η συμμετρική της f ως προς τον χχ΄ .
- g(x)=|f(x)| . Η γραφική παράσταση είναι ίδια με την f για το τμήμα της f που βρίσκεται πάνω από τον άξονα χχ΄ και από τα συμμετρικά των σημείων της f που βρίσκονται κάτω από τον οριζόντιο άξονα ως προς τον χχ΄.
- $g(x)=f(|x|)=\begin{cases} f(-x), & x<0 \\ f(x), & x\geq 0 \end{cases}$ προκύπτει αν πάρουμε τα συμμετρικά των σημείων της f με αρνητικές τετμημένες ως προς τον χχ΄ και κρατήσουμε την f για το κομμάτι της που αντιστοιχεί σε τιμές του χ θετικές.

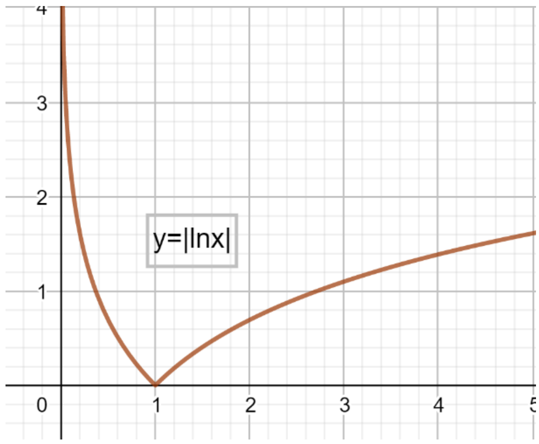
Καταλαβαίνετε ελπίζω, πως είναι δυνατόν να χρειαστούν παραπάνω από μία μετατοπίσεις για την εύρεση της γραμμής που ζητείται. Στα παρακάτω διαγράμματα, θεωρούμε γνωστή την
$f(x)=\sqrt{x}$ (μωβ) και με βάση αυτήν, κατασκευάζουμε τις $g(x)=\sqrt{x-2}+3$ (γκρι),
$h(x)=-\sqrt{x+2}+1$ (κόκκινη) και $k(x)=\sqrt{3-x}-2$ (πράσινη).



Δείτε, τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:

$g(x)=\ln|x|$ και $h(x)=|\ln x|$, θεωρώντας γνωστή την $f(x)=\ln x,\ x>0$.





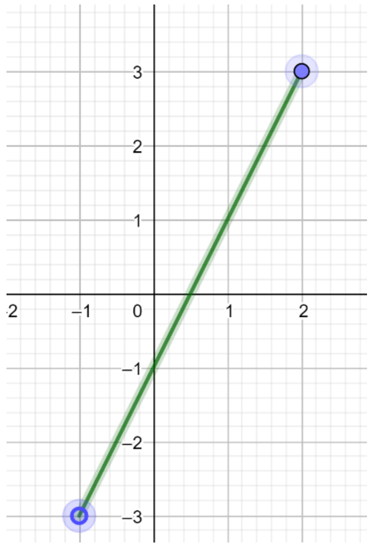
ΕΥΘΕΙΕΣ

Οι ευθείες της μορφής χ=αριθμός ή ψ=αριθμός είναι κατακόρυφες ή οριζόντιες αντίστοιχα και χαράζονται εύκολα. Οι ευθείες της μορφής ψ=αχ είναι ευθείες που διέρχονται από το (0,0) , συνεπώς απαιτείται ένα μόνο σημείο ακόμα για τη χάραξή τους: Δώστε μια «βολική» τιμή στο χ, όχι το 0, βρείτε το αντίστοιχο ψ και απλά ενώστε το σημείο που βρήκατε με το (0,0).

Για τις ευθείες της μορφής ψ=αχ+β, δίνετε δύο τιμές στο χ και βρίσκετε τις δύο αντίστοιχες τιμές για το ψ. Αν θέλετε μπορείτε να πάρετε έτοιμο το σημείο (0,β) και ένα ακόμα που να σας εξυπηρετεί ή να δώσετε στο ψ την τιμή 0 και να βρείτε το χ, αφού έτσι θα έχετε έτοιμα και τα σημεία τομής με τους άξονες.

Αν πάλι ο τύπος της ευθείας αναφέρεται σε συγκεκριμένο διάστημα τιμών για το χ, για παράδειγμα:

$y=2x-1,\quad -1<x\leq 2$, δώστε στο χ οπωσδήποτε τις τιμές -1 και 2 και ενώστε τα δύο σημεία που θα βρείτε. Επειδή στο -1 δεν έχει ίσον, απλά φτιάξτε ένα λευκό κυκλάκι αντί για κουκίδα στο αντίστοιχο σημείο για να δείξετε ότι το συγκεκριμένο σημείο δεν ανήκει στη γραφική παράσταση, όπως ακριβώς το βλέπετε στο διπλανό σχήμα.



Καλό θα είναι να θυμάστε απέξω ότι οι y=x και y=-x είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των αξόνων – η y=x για 1° – 3° τεταρτημόριο και η ευθεία y=-x για 2° – 4° τεταρτημόριο.

Φυσικά μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μετατοπίσεις για τη χάραξη, αλλά δεν αξίζει τον κόπο!

ΠΑΡΑΒΟΛΕΣ

1. Με κατακόρυφο άξονα συμμετρίας

Όταν πρέπει να παραστήσετε γραφικά μια συνάρτηση της μορφής $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma,\ \alpha\neq 0$, ένας από τους τρόπους (που δεν έχει εξαιρέσεις!!!) είναι να θυμάστε ότι η κορυφή της παραβολής προκύπτει πάντοτε για $\chi=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$. Δώστε στο χ αυτή την τιμή, βρείτε το αντίστοιχο ψ της κορυφής και στη συνέχεια δώστε στο χ τιμές κατάλληλες: Δύο τουλάχιστον τιμές πριν το -β/2α και άλλες δύο τιμές μετά από αυτό. Αν μάλιστα φροντίσετε οι τιμές να είναι συμμετρικές ως προς το -β/2α, τότε και τα σημεία θα βγαίνουν συμμετρικά, δηλαδή θα έχουν την ίδια τιμή για το ψ, αφού η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $\chi = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ είναι άξονας συμμετρίας για την παραβολή. Ο τρόπος αυτός έχει το πλεονέκτημα ότι εφαρμόζεται και σε δευτεροβάθμιες όπου το β ή το γ είναι μηδέν και δεν απαιτεί να φέρει κανείς το τριώνυμο σε μια άλλη μορφή.

Ένας άλλος τρόπος, είναι να χρησιμοποιήσουμε τις οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις της γραμμής $\psi = \alpha x^2$. Αυτό όμως απαιτεί να φέρουμε το τριώνυμο στη μορφή: $\psi = \alpha\left[\left(x - \dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$, οκ, είναι πιο εύκολο από ότι φαίνεται και μπορεί να φανεί χρήσιμο και σε επίλυση ασκήσεων που αφορούν την εύρεση μέγιστου-ελάχιστου ή την εύρεση της αντίστροφης μιας συνάρτησης. Δείτε μερικά παραδείγματα «συμπλήρωσης» τετραγώνου αναλυτικά για να καταλάβετε:

$$y = x^2 - 8x + 11 = x^2 - 8x + 4^2 - 4^2 + 11 = (x-4)^2 - 5$$

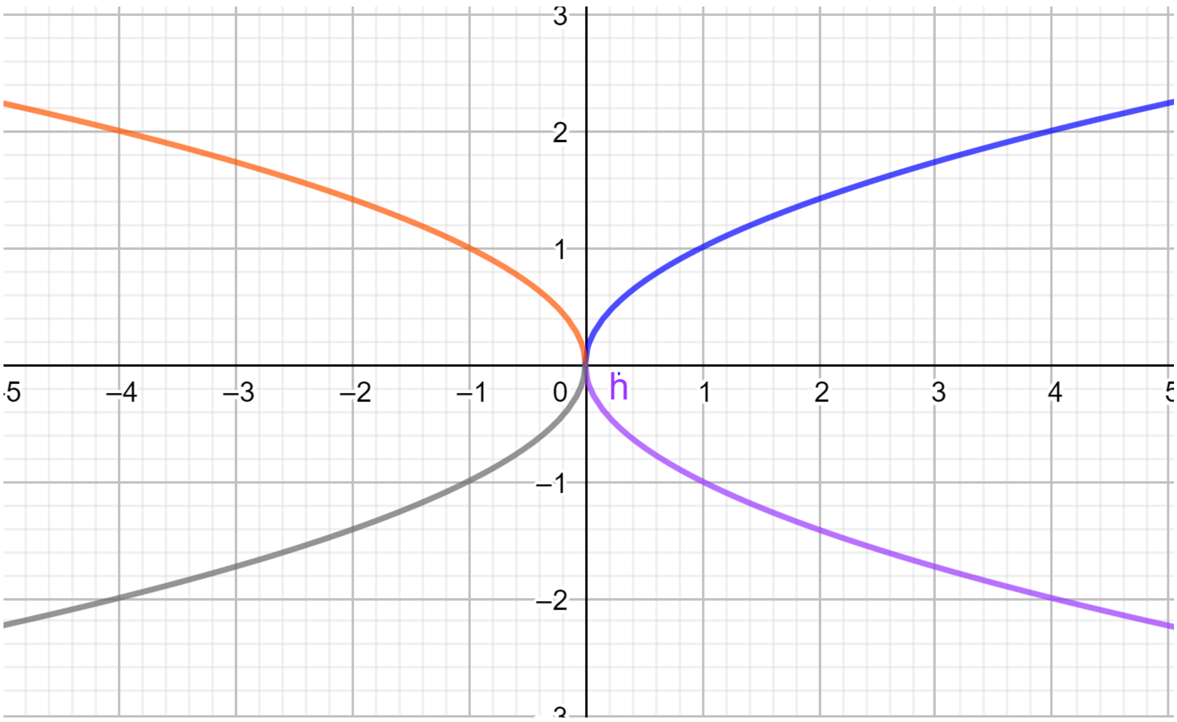
$$y = x^2 + 3x - 2 = x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$

$$y = 2x^2 - 5x + 7 = 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 7\right) = 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{87}{16}\right]$$

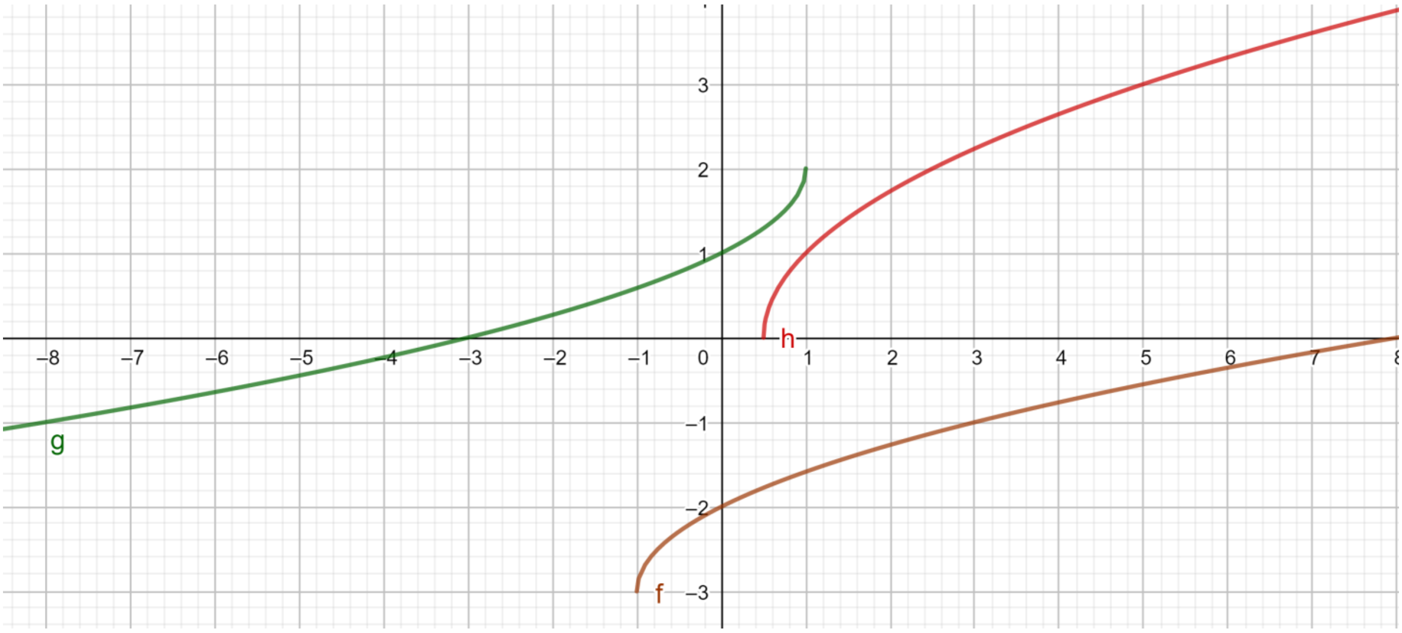
2. Με οριζόντιο άξονα συμμετρίας

Εδώ αντιμετωπίζουμε γραμμές με εξίσωση της μορφής $y^2=\alpha x$. Επειδή όμως μιλάμε για συναρτήσεις, ο τύπος είναι λυμένος ως προς y και εμφανίζεται σαν ρίζα. Είναι βασικό να μπορείτε να χαράξετε αμέσως τα βασικά τμήματα παραβολών αυτής της μορφής.

Δείτε τις $\sqrt{x}, -\sqrt{x}, \sqrt{-x}, -\sqrt{-x}$ στο ίδιο σχήμα. Είναι οι γραφικές 4 συναρτήσεων, οι οποίες όμως προκύπτουν από δύο παραβολές, την $y^2 = x$ και την $y^2 = -x$.



Με τη βοήθεια κατάλληλων μετατοπίσεων μπορούμε να χαράξουμε γρήγορα σχετικά γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων όπως οι: $f(x)=\sqrt{x+1}-3,\ g(x)=2-\sqrt{1-x},\ h(x)=\sqrt{2x-1}$



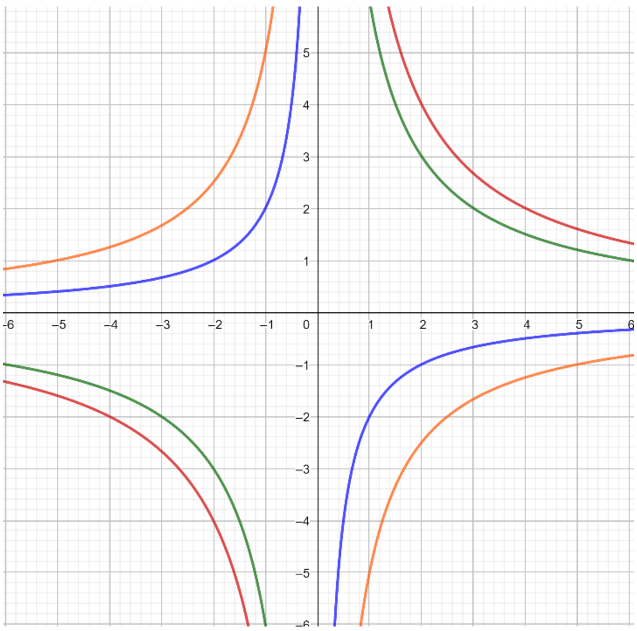
Εννοείται πως αυτό μπορεί να συμβεί και απλώς δίνοντας κατάλληλες τιμές στο χ και βρίσκοντας αντίστοιχες τιμές για το y.

<u>ΥΠΕΡΒΟΛΕΣ</u>

Η γραφική παράσταση συνάρτησης με τύπο $\psi=\frac{\alpha}{x},\ x\in\mathbb{R}^*$ λέγεται υπερβολή και αποτελείται πάντα από δύο κλάδους σε 1^o και 3^o τεταρτημόριο αν α>0 και σε 2^o και 4^o αν α<0. Οι άξονες λειτουργούν ως ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης. Για τη χάραξη της, απαιτείται πλήθος τιμών – 4 θετικές, 4 αρνητικές τουλάχιστον – για να μπορέσουμε να έχουμε δυνατότητα να τη χαράξουμε στοιχειωδώς!

Δείτε έτοιμες μερικές τέτοιες καμπύλες:

y=6/x (πράσινη)
y=8/x (κόκκινη)
y=-5/x (πορτοκαλί)
y=-3/x (μπλε)



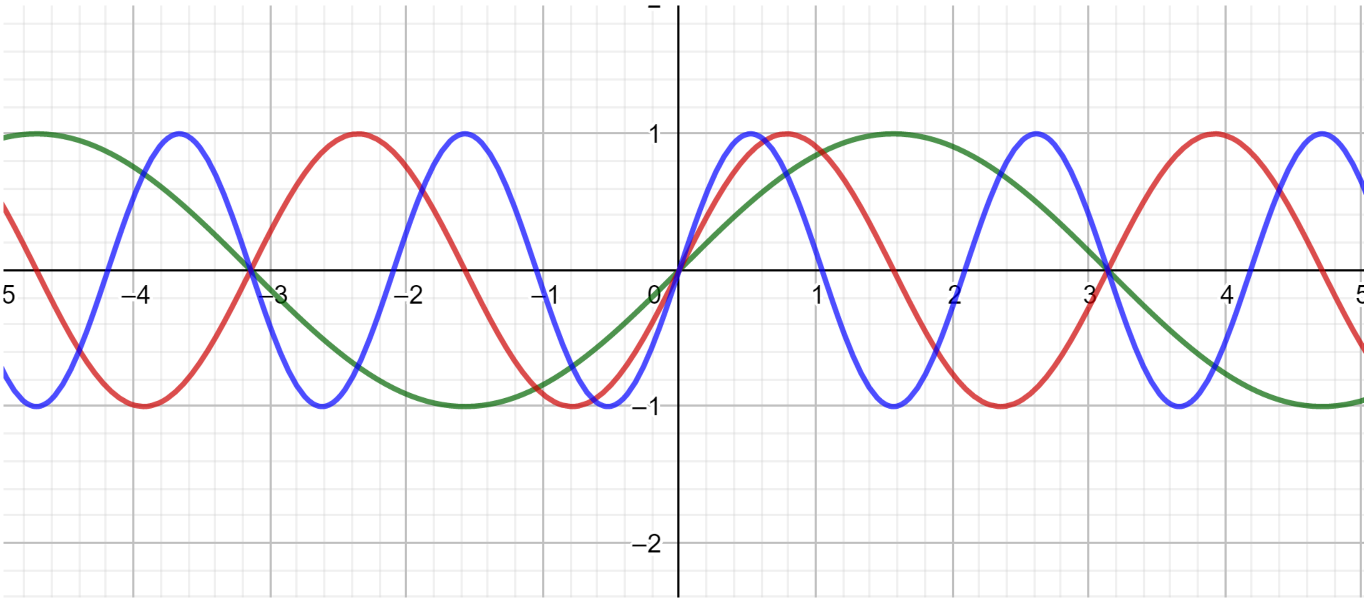
Αν χρησιμοποιήσουμε τις μετατοπίσεις, μπορούμε να χαράξουμε και τις γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων όπως ας πούμε:

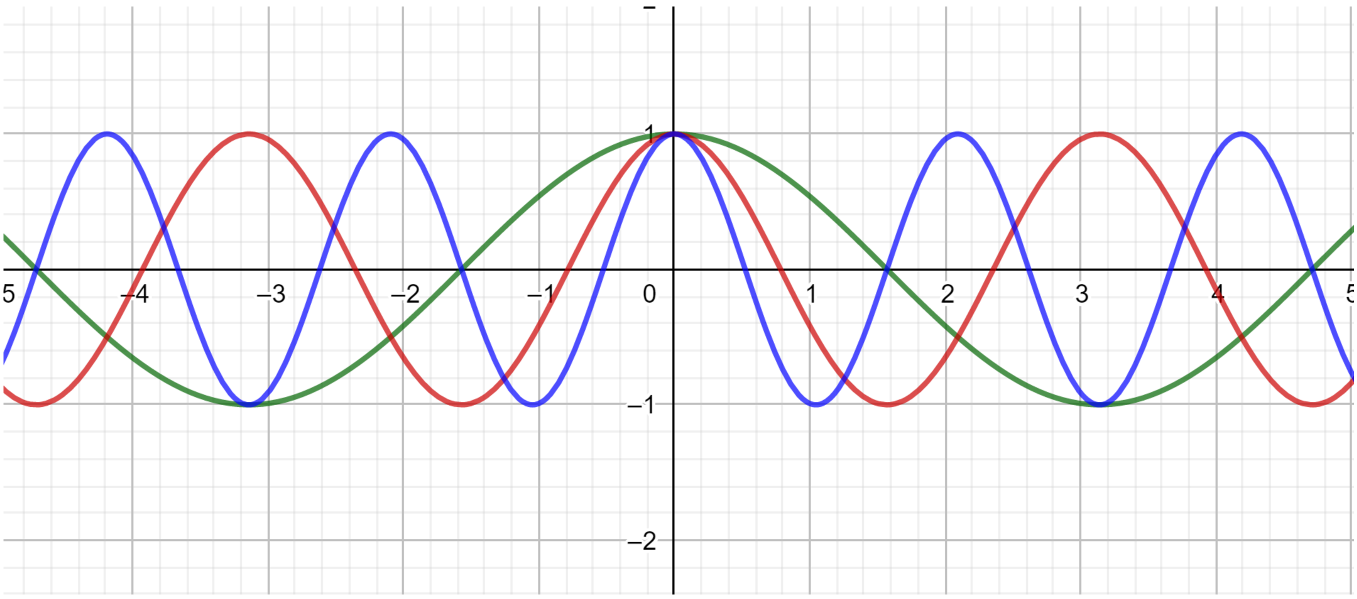
$\psi = \dfrac{x+3}{x-2} = \dfrac{x-2+5}{x-2} = \dfrac{5}{x-2} + 1$, δηλαδή η $\psi = \dfrac{5}{x}$ μετατοπισμένη δύο μονάδες δεξιά και μία μονάδα πάνω!

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ

Οι συναρτήσεις ημx και συνx είναι περιοδικές με περίοδο 2π και πεδίο ορισμού όλο το R. Οι συναρτήσεις με τύπους $f(x) = ημkx$ και $g(x) = συνkx$ έχουν περίοδο ίση με $\dfrac{2\pi}{k}$. Στα σχήματα που ακολουθούν, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των

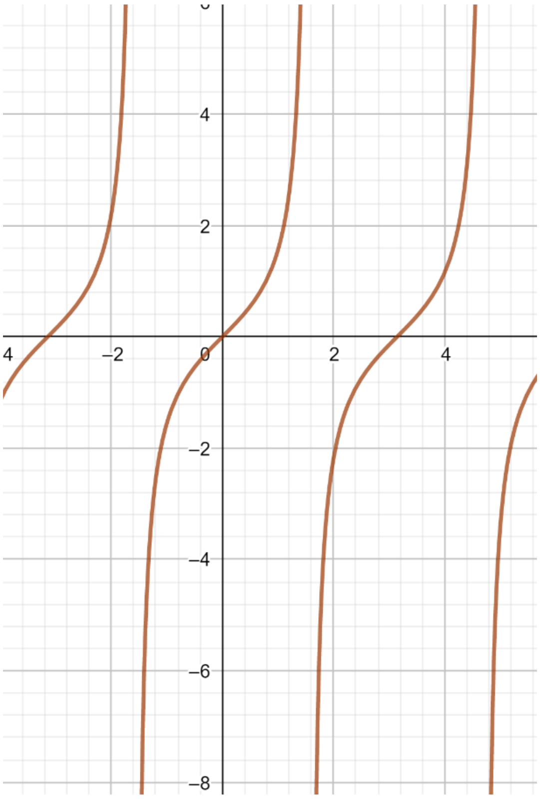
$f(x) = ημx$ (κόκκινη), $g(x) = ημ2x$ (μπλε) και $h(x) = ημ3x$ (πράσινη) καθώς και οι αντίστοιχες συνx, συν2x και συν3x.

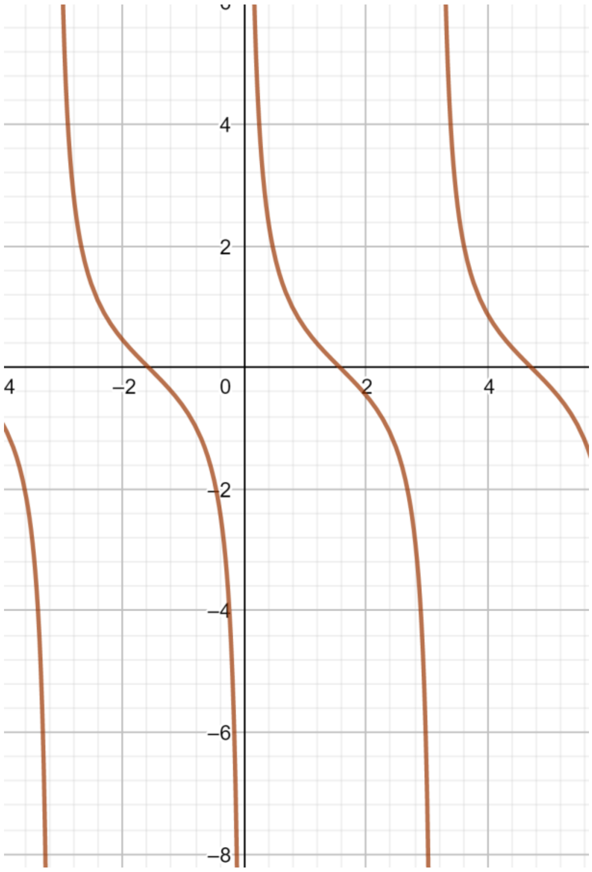




Για τη συνάρτηση εφx, το πεδίο ορισμού είναι οι πραγματικοί αριθμοί εκτός από τις τιμές που μηδενίζουν το συνx, δηλαδή όλοι οι αριθμοί της μορφής $x = κπ + \frac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$ οι οποίες εξαιρούνται.

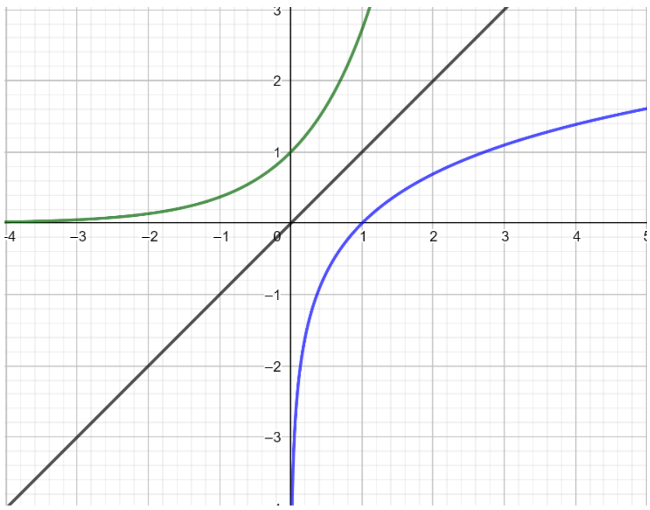
Αντίστοιχα, για τη συνάρτηση σφx, εξαιρούνται οι αριθμοί της μορφής $x = κπ$, $κ \in \mathbb{Z}$.Οι δύο συναρτήσεις είναι περιοδικές με περίοδο ίση με π. Δείτε παρακάτω τις γραφικές τους παραστάσεις.



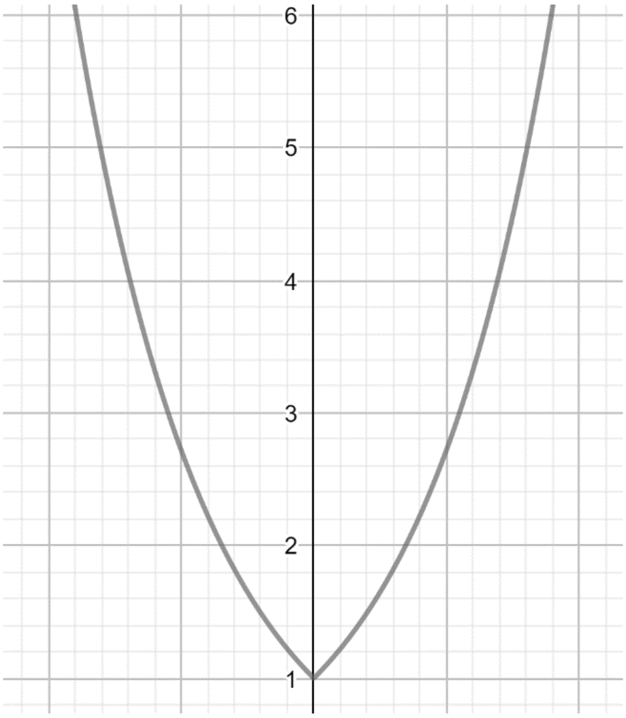


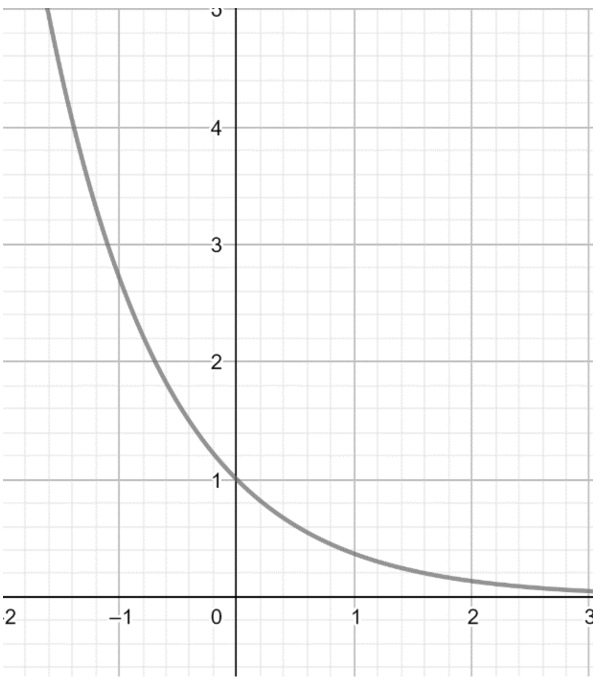
<u>ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ</u>

Η συνάρτηση με τύπο $f(x)=e^x$ και η $g(x)=\ln x$ έχουν άξονα συμμετρίας την ευθεία y=x . Απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα:

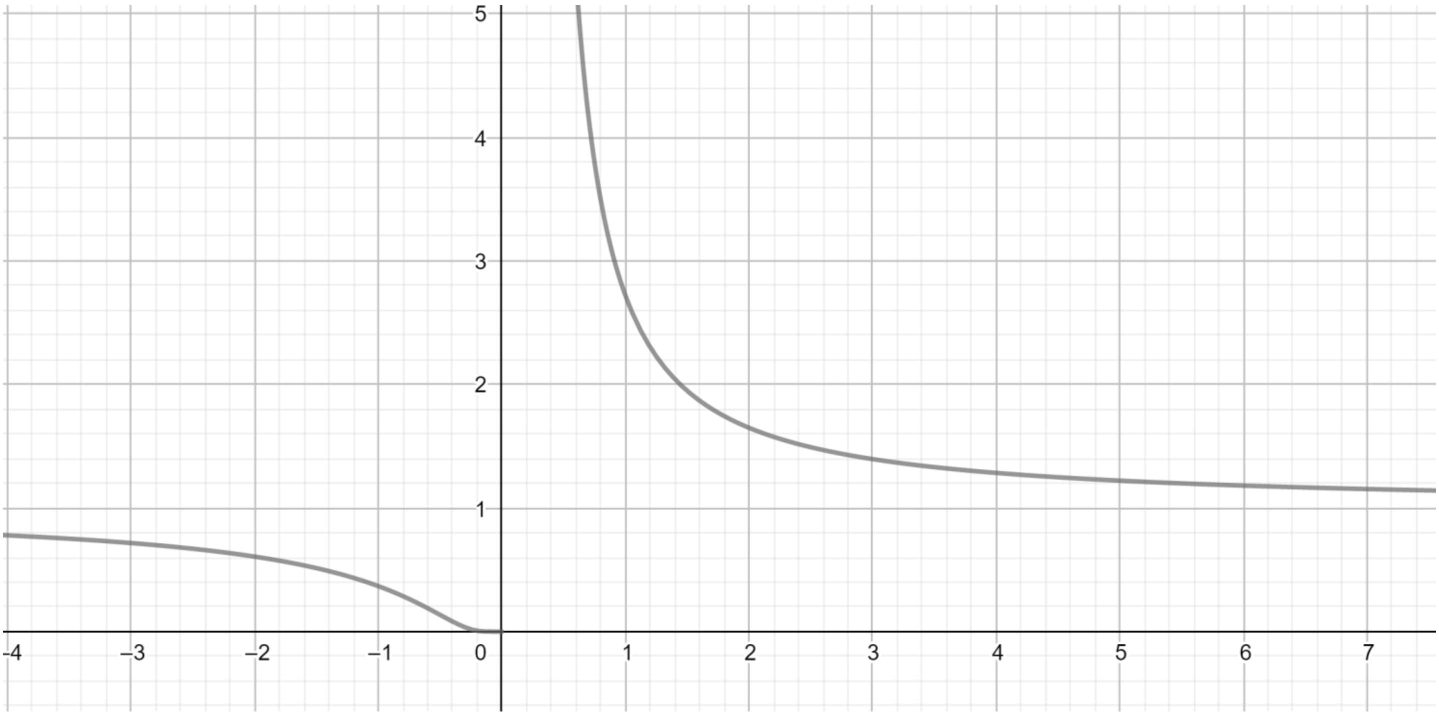


Δείτε τις συναρτήσεις: $f(x) = e^{|x|}$, $g(x) = e^{-x}$





Καθώς και την συνάρτηση $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

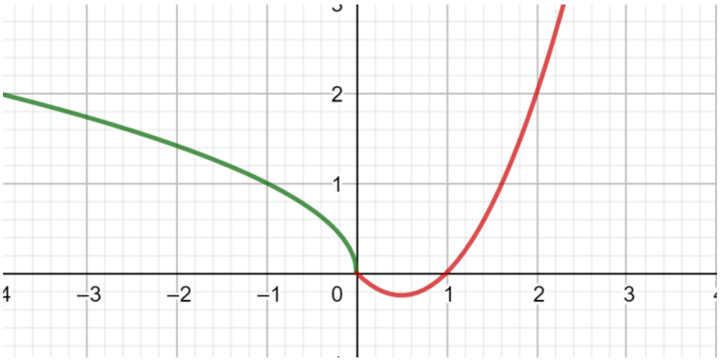


<u>ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΚΛΑΔΟΥΣ</u>

Έστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ x^2-x, & x\geq 0\end{cases}$. Για να κατασκευάσουμε τη γραφική της παράσταση, δίνουμε κατάλληλες τιμές στο χ για κάθε κλάδο. Στην προκειμένη περίπτωση, θα δίναμε στο χ τις τιμές -4,-1, 0 (για τον πάνω κλάδο , που είναι τμήμα παραβολής) και για τον κάτω κλάδο, την τιμή χ=1/2 (θυμηθείτε ότι η κορυφή προκύπτει για χ=-β/2α) και τις τιμές 0, 1, 2. Προσέξτε ότι την τιμή 0 την έδωσα και στις δύο περιπτώσεις, προκειμένου να δω αν η γραμμή «κόβεται» στο 0 (να ελέγξω δηλαδή αν η συνάρτηση είναι «συνεχής» για χ=0). Προκύπτει λοιπόν ο παρακάτω πίνακας τιμών:

x	-4	-1	0	1/2	1	2
f(x)	2	1	0	-1/4	0	2

Και με τη βοήθειά του η γραφική παράσταση:



Έστω η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases}1-\ln x, & x\geq 1\\ -\sqrt{2-x}, & x<1\end{cases}$ Παρατηρήστε ότι οι δύο κλάδοι δίνουν διαφορετικό αποτέλεσμα για χ=1 και η αντίστοιχη γραφική «κόβεται» ή αλλιώς «παρουσιάζει ασυνέχεια» για χ=1. Ο κάτω κλάδος για χ=1 δίνει αποτέλεσμα -1. Εμείς στο σημείο (1,-1) θα «ζωγραφίσουμε» ένα λευκό κυκλάκι για να ξέρουμε που τελειώνει ο κάτω κλάδος, ενώ θα βάλουμε κανονική μαύρη κουκκίδα στο σημείο (1,1). Δίνοντας στο χ κατάλληλες τιμές, μπορούμε να έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

-7	-2	1	1	e
-3	-2	(-1)	1	0

και την αντίστοιχη γραφική του σχήματος δίπλα: