ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 2 – ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ

ΘΕΩΡΙΑ

Θ1. Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού χ, είναι η απόσταση της εικόνας του στον άξονα των πραγματικών αριθμών από το 0 του άξονα και εξαιτίας αυτού είναι θετικός αριθμός για κάθε χ, εκτός από το ίδιο το 0 του οποίου η απόλυτη τιμή είναι μηδέν. Αλγεβρικά, αυτό εκφράζεται ως εξής:
$|x|=\begin{cases} -x, & \text{αν } x<0 \\ x, & \text{αν } x\geq 0 \end{cases}$ και φυσικά γενικεύεται για οποιαδήποτε ποσότητα Α, $|A|=\begin{cases} -A, & \text{αν } A<0 \\ A, & \text{αν } A\geq 0 \end{cases}$.

Αν με d συμβολίσουμε την απόσταση του x από το 0, είναι d(x,0)=d(-x,0)=|x|.

Θ2. Βασικές ιδιότητες: $|x|\geq x$ και $|x|\geq -x$, $|x|^2=x^2$, $|xy|=|x|\cdot|y|$, $\dfrac{|x|}{|y|}=\left|\dfrac{x}{y}\right|$. Η ιδιότητα του πολ/μου ισχύει και για παραπάνω από δύο όρους.

Θ3. Συμβολίζουμε την απόσταση δύο αριθμών α, β με d(α,β)=d(β,α)=|α-β|=|β-α|.

Θ4. Ισχύει ότι: $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$.

Για να το αποδείξουμε, υψώνουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο, οπότε η σχέση γίνεται:

$|\alpha+\beta|^2\leq(|\alpha|+|\beta|)^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\leq\alpha^2+\beta^2+2|\alpha||\beta| \Rightarrow \alpha\beta\leq|\alpha\beta|$, το οποίο ισχύει.

Η ιδιότητα ισχύει με ανάλογο τρόπο και για παραπάνω από 2 όρους.

Θ5. Προσοχή στις ανισοτικές σχέσεις: Η απόσταση ενός αριθμού χ από έναν αριθμό α είναι μικρότερη από τον θετικό αριθμό ρ, δηλαδή d(x,α)<ρ, |x-α|<ρ, σημαίνει ότι οι τιμές του χ βρίσκονται ανάμεσα στο α-ρ και στο α+ρ, δηλαδή: $|x-\alpha|<\rho \Leftrightarrow -\rho<\chi-\alpha<\rho \Leftrightarrow \alpha-\rho<x<\alpha+\rho \Leftrightarrow x\in(\alpha-\rho,\alpha+\rho)$.

Με αντίστοιχη προσέγγιση, η απόσταση του x από το α είναι μεγαλύτερη από το θετικό αριθμό ρ, τότε:
$|x-\alpha|>\rho \Leftrightarrow x-\alpha>\rho$ ή $x-\alpha<-\rho \Leftrightarrow x>\alpha+\rho$ ή $x<\alpha-\rho \Leftrightarrow x\in(-\infty,\alpha-\rho)\cup(\alpha+\rho,+\infty)$

Θ6. Με βάση τον ορισμό, οι εξισώσεις της μορφής |Α(χ)|=θ , θ>0, λύνονται ζητώντας Α(χ)=θ ή Α(χ)=-θ, ενώ οι εξισώσεις της μορφής |Α(χ)|=|Β(χ)| λύνονται ζητώντας Α(χ)=Β(χ) ή Α(χ)=-Β(χ). Σε όλα τα παραπάνω, οι ποσότητες Α(χ), Β(χ) συμβολίζουν παραστάσεις με μια μεταβλητή χ.

Θ7. Η σχέση |x|+|y|=0 σημαίνει απαραίτητα ότι x=0 **και** y=0. Με παρόμοια προσέγγιση , η σχέση |x|+|y|>0 ισχύει για οποιεσδήποτε τιμές των x,y εκτός από την περίπτωση όπου x=0 **και** y=0.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Π1. Αν $-2<x<1$, να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις: $A=2|x-1|-|x+2|$, $B=|-2-x|-|1-x|$

Βρίσκουμε το πρόσημο των παραστάσεων που είναι μέσα στις απόλυτες τιμές, δηλαδή:
$x<1\Rightarrow x-1>0$ ενώ $1-x<0$ και $-2<x\Rightarrow -2-x<0$, $x+2>0$.

Στη συνέχεια , ξαναγράφουμε τις παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές, αφήνοντας το ίδιο πρόσημο αν η ποσότητα μέσα στο απόλυτο είναι θετική και αλλάζοντας το πρόσημο αν η ποσότητα είναι αρνητική.

$A=2|x-1|-|x+2|=2(x-1)-(x+2)=2x-2-x-2=x-4$

$B=|-2-x|-|1-x|=-(-2-x)+(1-x)=2+x+1-x=3$

Π2. $|f(x)|=\alpha \xleftrightarrow{\alpha>0} f(x)=\alpha$ ή $f(x)=-\alpha$. Παραδείγματα:

$|2x-1|=4 \Leftrightarrow 2x-1=4$ ή $2x-1=-4 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$ ή $x=-\dfrac{3}{2}$

$|1-4x|=-3$ αδύνατη.

Π3. $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$

Παράδειγμα: $|3\chi-2|=|2\chi+1| \Leftrightarrow 3\chi-2=2\chi+1$ ή $3\chi-2=-2\chi-1 \Leftrightarrow \chi=3$ ή $\chi=\dfrac{1}{5}$

Π4. $|f(x)| = A(x)$. Ζητώ $A(x) \geq 0$ και $f(x) = A(x)$ ή $f(x) = -A(x)$. Παραδείγματα :

$|3\chi - 2| = \chi - 1$. Ζητώ $\chi \geq 1$. $3\chi - 2 = \chi - 1$ ή $3\chi - 2 = -\chi + 1 \Leftrightarrow \chi = \frac{1}{2}$ $\quad \chi = \frac{3}{4}$, μη δεκτές.

$|\chi - 2| = \chi - 2$, ισχύει εφόσον $\chi - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \chi \geq 2$

$|\chi + 1| = -\chi - 1$, ισχύει εφόσον $\chi + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \chi \leq -1$

Π5. Σε κάθε άλλη περίπτωση, κάνουμε πίνακα προσήμων για τις παραστάσεις μέσα στις απόλυτες τιμές.

$|\chi - 1| - 2\chi = 3|\chi| + 2$. Κάνουμε πίνακα προσήμων για τις ποσότητες $\chi - 1, \chi$ με τιμές μηδενισμού τα 0 και 1. Προκύπτουν οι παρακάτω περιπτώσεις :

$x \in (-\infty, 0)$: $-x + 1 - 2x = -3x + 2 \Leftrightarrow 1 = 2$, αδύνατη.

$x \in [0,1]$: $-x + 1 - 2x = 3x + 2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{6}$, μη δεκτή.

$x \in (1, +\infty)$: $x - 1 - 2x = 3x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$, μη δεκτή.

Π6. Επειδή $|A| = |-A|$, σε εξισώσεις όπου υπάρχει μόνο ένα είδος απόλυτης τιμής, μπορούμε να την ονομάσουμε με ένα βοηθητικό άγνωστο. Για παράδειγμα :

$$\frac{|x-2|-1}{3} - \frac{2-|2-x|}{4} = 1 - \frac{|2x-4|}{6} \xleftrightarrow{y=|x-2|} \frac{y-1}{3} - \frac{2-y}{4} = 1 - \frac{2y}{6} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y = 2$$

Συνεπώς $|x - 2| = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 4$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, αν γνωρίζετε ότι $-1<y<x<2$:

a. $|x - y| =$ b. $|x + 1| =$ c. $|-1 - y| =$ d. $|2 - x| =$ e. $|y - 2| =$

Α2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτη τιμή, διακρίνοντας περιπτώσεις όπου απαιτείται:

a. $|x^2 + 3| =$ b. $|y^2 + 2| =$ c. $|-1 - a^4| =$ d. $|x - 2| =$ e. $|a + 3| =$

Α3. Αν ισχύει η ισότητα: $|2x-1|=2x-1$, τι τιμές παίρνει η μεταβλητή x ;

Απαντήστε στην ίδια ερώτηση για το y, αν ισχύει η ισότητα: $|y-2|=2-y$.

Α4. Αν $-2 < a < 1 < b$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτη τιμή :

$K = 2|a - 1| - 3|b - a| + |-2 - b|$ $\qquad$ $L = -|2 + a| + |b - 1| - 2|a - b|$

A5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $|2x+3|=5$ b. $|x+1|=-2$ c. $|1-3x|=5$ d. $|3x-2|=2|x+1|$

A6. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις , εκφράζοντας το τελικό αποτέλεσμα με διάστημα ή ένωση διαστημάτων, όπως βλέπετε στο παράδειγμα:

$|x-2|<5 \Leftrightarrow -5<x-2<5 \Leftrightarrow -3<x<7 \Leftrightarrow x \in (3,7) \Leftrightarrow d(x,2)<5$

a. $|x-1| \le 3$

b. $|x+2|>4$

c. $|x-3|<1$

d. $|4-x| \ge 2$

A7. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές, διακρίνοντας περιπτώσεις για τις διάφορες τιμές που μπορεί να πάρει η μεταβλητή x, αφού πρώτα συμπληρώσετε τα πρόσημα στο πρώτο πινακάκι, που αφορά τις παραστάσεις μέσα στα απόλυτα για την παράσταση K. Στη συνέχεια κάνετε κάτι ανάλογο και για την παράσταση L.

$K=2\cdot|x-1|-3|x|-2$ $L=-|2+x|+2\cdot|3-x|$

		0		1	
x-1				•	
x		•			

A8. Αξιοποιώντας τα πινακάκια του A7, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

a. $3|x-1|-4=2|x|-x$ b. $4|3-x|=x-2|x+2|$

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

35415. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

36777. Δίνονται δύο τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν: $|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 2x και y. (Μονάδες 13)

35041. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x,3) = 3 - 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

35043. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$. (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$. (Μονάδες 13)

37200. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$, τότε:

α) να δείξετε ότι $x \in (-3,1)$. (Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

37201. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$. (Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$. (Μονάδες 13)

12909. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3| < 5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2,8)$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3| < 5$. (Μονάδες 7)

γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)

14599. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1,1)$ ισχύει $x^2 < 1$. (Μονάδες 13)

14617. Δίνεται η ανίσωση $|x-7| < 1$ (I).

α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6,8)$. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζουμε ότι $k \in (6,8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{k} \in (3,4)$. (Μονάδες 13)

36671. Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x. (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι: $|x+4|+|x-14|=18$. (Μονάδες 5)

36672. Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα. (Μονάδες 7)

33888. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση: $(\alpha-1)(1-\beta)>0$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β. (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. (Μονάδες 12)

33896. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2|<1$ και $|\beta-3|\le 2$.

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$. (Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β. (Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$. (Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 9)

13179. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1\le\beta\le 2$ και $2\le\alpha\le 4$.

α) i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β) i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}\le 1\le\frac{\alpha}{\beta}$. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$. (Μονάδες 6)

36673. Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$. (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$ τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)