ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1 – ΔΙΑΤΑΞΗ - ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Θ1. Αν έχουμε να συγκρίνουμε δύο ποσότητες Α, Β μπορούμε να βρούμε το πρόσημο της διαφοράς Α-Β: Αν είναι θετικό, τότε Α>Β. Αν είναι αρνητικό, τότε Α<Β. Προφανώς, αν Α-Β=0 τότε Α=Β.
Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι Α, Β είναι θετικές ποσότητες, μπορούμε να συγκρίνουμε το λόγο Α/Β με τη μονάδα: Αν (Α/Β)>1 τότε Α>Β ενώ αν (Α/Β)<1 είναι Α<Β.

Θ2. Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης, επιτρέπεται να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάξουμε τη φορά της.

Θ3. Μπορούμε να πολ/με ή να διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο **θετικό** αριθμό χωρίς να αλλάξουμε τη φορά της. Αν κάνουμε το ίδιο με **αρνητικό** αριθμό, τότε πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της.

Θ4. Αν δύο ομόσημοι αριθμοί αντιστραφούν, τότε και η μεταξύ τους ανισοτική σχέση επίσης αντιστρέφεται.
Με σύμβολα: $\text{Αν } \alpha,\beta \text{ ομόσημοι τότε: } \alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$

Θ5. Επιτρέπεται να προσθέσουμε δύο ομοιόστροφες ανισότητες διατηρώντας τη φορά τους στα αθροίσματα.

Θ6. Επιτρέπεται να πολ/με κατά μέλη δύο ομοιόστροφες ανισότητες μόνο αν όλες οι ποσότητες που υπάρχουν σε αυτές είναι θετικές. Με σύμβολα: Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί με $\alpha<\beta$ και $\gamma<\delta$ τότε $\alpha\gamma<\beta\delta$

Θ7. Δεν επιτρέπεται να **αφαιρέσουμε** ή να **διαιρέσουμε** κατά μέλη δύο ανισότητες.

Θ8. Για δύο **θετικούς** αριθμούς α, β ισχύουν οι ισοδυναμίες: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu$ και $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu=\beta^\nu$

Θ9. Αν ο κ είναι ένας θετικός περιττός ακέραιος αριθμός, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\kappa<\beta^\kappa$

Θ10. Οποιαδήποτε ποσότητα υψωθεί σε άρτιο εκθέτη δίνει μη αρνητικό αριθμό. Δηλαδή, $A^{2\kappa}\geq 0$.
Επίσης ισχύουν οι σχέσεις: Αν $A^{2\kappa}+B^{2\nu}=0$, όπου $\kappa,\nu\in\mathbb{Z}$ τότε $A=0$ και $B=0$

Θ11. Η παρένθεση διαβάζεται «ανοικτό» ενώ η αγκύλη σαν «κλειστό» διάστημα. Κλειστό διάστημα σημαίνει πως η αντίστοιχη ακραία τιμή περιλαμβάνεται ενώ το ανοικτό διάστημα την αφήνει «απέξω». Η αντιστοίχιση ανισοτήτων με διαστήματα γίνεται ως εξής:
$a<x<b \Leftrightarrow x\in(a,b)$, $a\leq x\leq b \Leftrightarrow x\in[a,b]$, $a<x\leq b \Leftrightarrow x\in(a,b]$, $x<a \Leftrightarrow x\in(-\infty,a)$ κ.λ.π.

Λυμένα παραδείγματα

Π1. Αν $1<x<3$ και $2<y<4$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παρακάτω ποσότητες:
a. $5-2x$ b. $\frac{8}{y}-2$ c. $2y-3x$ d. $\frac{6}{x}-2y$ e. x^2-2xy.

a. $1<x<3 \Leftrightarrow -2>-2x>-6 \Leftrightarrow 3>5-2x>-1$ b. $2<y<4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{y}>\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4>\frac{8}{y}>2 \Leftrightarrow 2>\frac{8}{y}-2>0$

c. $1<x<3 \Leftrightarrow -3>-3x>-9 \Leftrightarrow -9<-3x<-3 (*)$ και $2<y<4 \Leftrightarrow 4<2y<8 (**)$ συνεπώς προσθέτωντας κατά μέλη τις (*) και (**) προκύπτει $-5<2y-3x<5$

d. $1<x<3 \Leftrightarrow 1>\frac{1}{x}>\frac{1}{3} \Leftrightarrow 6>\frac{6}{x}>2 (*)$ και $2<y<4 \Leftrightarrow -4>-2y>-16 (**)$ οπότε με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει $2>\frac{6}{x}-2y>-14$

e. $1<x<3 \Leftrightarrow 1<x^2<9$ και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις αρχικές $2<xy<12 \Leftrightarrow -4>-2xy>-24$ $\Leftrightarrow -24<-2xy<-4$ άρα $-23<x^2-2xy<5$

Π2. Να αποδείξετε ότι: a. $x^2-8x+23>0$ b. $x^2+y^2-4x+2y+7>0$

a. $x^2-8x+23=x^2-8x+16+7=(x-4)^2+7>0$
b. $x^2+y^2-4x+2y+7=x^2-4x+4+y^2+2y+1+2=(x-2)^2+(y+1)^2+2>0$

Π3. Να αποδείξετε ότι αν α, β, γ είναι θετικοί αριθμοί με α<β<γ τότε: $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<1<\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}$

$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<1 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}-1<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma-\beta-\gamma}{\beta+\gamma}<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-\beta}{\beta+\gamma}<0$ που ισχύει γιατί $\alpha<\beta$ και $\beta,\gamma>0$

$1<\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}<0 \Leftrightarrow \frac{\beta-\gamma-\alpha+\gamma}{\beta-\gamma}<0 \Leftrightarrow \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma}<0$ που ισχύει γιατί $\alpha<\beta$ και $\beta<\gamma$ άρα $\beta-\alpha>0$ και $\beta-\gamma<0$

Π4. Να αποδείξετε ότι: $4x^2-5xy+2y^2>0$

Κάνουμε συμπλήρωση τετραγώνου στο α΄ μέλος:

$$4x^2-5xy+2y^2=4x^2-5xy+\frac{25y^2}{16}-\frac{25y^2}{16}+2y^2=\left(2x-\frac{5y}{4}\right)^2+\frac{7y^2}{16}>0$$

Π5. Αν για τις τιμές μιας μεταβλητής x πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις $x\in[-2,+\infty)$ και $-5\le x<8$, σε ποιο διάστημα ανήκει τελικά το x;

Προφανώς, $x\in[-2,8)$, δηλαδή $-2\le x<8$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α1. Αν $2<x<3$ τότε: $\quad <2x< \quad$ και $\quad >-3x> \quad$ και $\quad <x-4< \quad$ και $\quad >\frac{1}{x}>$

Α2. Να αποδείξετε ότι: $x^2+4x+5>0$ και $4y^2+7>4y$

Α3. Να αποδείξετε ότι: $x^2+y^2+13\ge 4x+6y$. Σε ποια περίπτωση ισχύει η ισότητα;

Α4. Αν $a<b<c$ να αποδείξετε ότι: $ab+bc>b^2+ac$ και $\frac{b-a}{c-a}<1$

Α5. Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι x, y. Αν ισχύει ότι: $2{,}1<x<2{,}4$ και $0{,}8<y<1{,}2$ να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται η περίμετρος και το εμβαδόν του.

A6. Να αποδείξετε ότι: $x^2 - 3xy + 4y^2 \geq 0$. Για ποιες τιμές των x,y ισχύει το ίσον;

A7. Αν $-2 < x < -1$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι ποσότητες:

α. $x^2 + y^2$ b. $\frac{2}{y} - \frac{4}{x}$

A8. Αν για τα x,y ισχύουν οι σχέσεις: $x \in [-2,3)$ και $y \in (-\infty,1]$, να αποδείξετε ότι:

α. $(3x - 2y) \in [-8,+\infty)$ β. $(3x + 2y) \in (-\infty,11)$

ΕΠΙΛΕΓΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

36899. Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

12673. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$. (Μονάδες 12)

12922. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

14820.α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν οι ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ **ii.** $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ (Μονάδες 4+4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A. (Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β)ι με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$. (Μονάδες 5)

13266. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$. (Μονάδες 8)

β) i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)

ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

14475. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$ (Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$ (Μονάδες 13)