# ΑΝΑΛΥΣΗ

## 1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ – ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

**1. Πεδίο ορισμού (οι τιμές που «επιτρέπεται» να πάρει ο χ, υποσύνολο του R, η προβολή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στον χ΄χ)**

Ζητάμε: α) Οι υπόρριζες ποσότητες να είναι μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός
β) Οι παρονομαστές να μην είναι μηδέν γ) Αν υπάρχει στον τύπο log ή ln απαιτούμε η παράσταση δίπλα του να είναι θετικός αριθμός. δ) Αν υπάρχει εφχ, ζητώ $\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ ενώ αν στον τύπο υπάρχει η σφχ, ζητώ $\chi \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

**2. Σύνολο τιμών (είναι οι τιμές που μπορεί να πάρει ο ψ, υποσύνολο του R, η προβολή της γραφικής παράστασης στον ψ΄ψ)**

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης, θέτουμε ψ=f(x) και λύνουμε ως προς χ. Στην προσπάθεια επίλυσης ως προς χ, πιθανόν να προκύψουν περιορισμοί για τις τιμές του ψ. Συναληθεύουμε αυτούς τους περιορισμούς με εκείνους που προκύπτουν από την απαίτηση η λύση ως προς χ που βρήκαμε, να ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

**3. Πως βρίσκω τον τύπο της f(x) αν δίνεται μια συναρτησιακή σχέση;**

Η βασική συνταγή είναι ότι αν δοθεί μια σχέση με f(x) και f(κάτι) , δημιουργείτε μια νέα σχέση βάζοντας στην ήδη υπάρχουσα, όπου χ το κάτι και στη συνέχεια αντιμετωπίζετε τις δύο σχέσεις σαν σύστημα με αγνώστους τα f(x) και f(κάτι).
Αν πάλι η δοθείσα σχέση δεν έχει καθόλου f(x) αλλά είναι μια σχέση που περιέχει άλλες παραστάσεις δίπλα στην f , ονομάστε μια από αυτές χ και προσπαθήστε να κάνετε το ίδιο με παραπάνω.

**4. Άρτια – περιττή συνάρτηση.**

Πρώτα βεβαιωθείτε ότι για κάθε χ που ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης και το (-χ) ανήκει επίσης στο πεδίο ορισμού της, δηλαδή ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι συμμετρικό ως προς το 0. Αν το πεδίο ορισμού δεν έχει αυτό το χαρακτηριστικό, ο έλεγχος σταματά, η συνάρτηση δεν είναι τίποτα από τα δύο.
Εφόσον όμως υπάρχει η συμμετρία, βρείτε το f(-x). Αν βγει ίσο με f(x) η συνάρτηση είναι άρτια (άξονα συμμετρίας τον ψ΄ψ). Αν βγει ίσο με –f(x) , η συνάρτηση είναι περιττή (κέντρο συμμετρίας το (0,0)). Αν δεν βγει τίποτα από τα δύο, (ναι, υπάρχει και αυτή η περίπτωση) , τότε δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

**5. Συνηθισμένες εκφράσεις και η απαίτηση δίπλα τους**

| **Έκφραση-απαίτηση** | **Μαθηματική συνθήκη** |
|---|---|
| Το σημείο $(x_o,y_o)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f | $f(x_o)=y_o$ |
| Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον χ΄χ | Στον τύπο της συνάρτησης, θέτω όπου y το 0, λύνω ως προς χ |
| Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον ψ΄ψ | Στον τύπο της συνάρτησης, θέτω όπου χ το 0, λύνω ως προς y. |
| Για ποιες τιμές η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , είναι πάνω από τον χ΄χ; | Λύνω την ανίσωση f(x)>0 ( ή f(x)<0, αντίστοιχα, αν είναι κάτω από τον χ΄χ) |

| | |
|---|---|
| Να βρείτε τα σημεία τομής των f(x) και g(x) | Λύνω το σύστημά τους, δηλαδή εξισώνω: f(x)=g(x) |

**6. Σύγκριση – Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων (+,-,.,/,=)**

Ξεκινήστε βρίσκοντας τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων , ας τα πούμε Α και Β καθώς και την τομή τους, ας την πούμε Γ (Δηλαδή $A=A_f$, $B=A_g$, $\Gamma=A\cap B$). Τώρα μπορείτε να προχωρήσετε:

α) Είναι f=g μόνο αν Α=Β και f(x)=g(x) για κάθε $x\in A=B$. **Προσοχή!** Αν οι f και g έχουν ίδιο τύπο αλλά διαφορετικό πεδίο ορισμού, μπορούμε να πούμε ότι f(x)=g(x) για κάθε $x\in\Gamma$.

β) Αν θέλουμε να βρούμε τις f+g, f-g, fg τότε κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις χρησιμοποιώντας τους τύπους τους και το Γ είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων που προκύπτουν ως αποτέλεσμα των πράξεων αυτών.

γ) Αν θέλουμε να βρούμε την f/g , απαιτούμε επιπλέον ο παρονομαστής να μη μηδενίζεται και αν υπάρχει επιπλέον περιορισμός, τον εξαιρούμε από το Γ.

**7. Σύνθεση συναρτήσεων**

Ας υποθέσουμε ότι δίνονται οι συναρτήσεις f και g και ζητείται η σύνθεση: $g\circ f$

Ξεκινάμε πάντοτε βρίσκοντας τα πεδία ορισμού τους , $A_f$ και $A_g$. Στη συνέχεια, βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης:

$A_{g\circ f}=\{x\in A_f \text{ ώστε και } f(x)\in A_g\}$. Εφόσον το σύνολο αυτό είναι διάφορο του κενού, προχωράμε στην εύρεση του τύπου της συνάρτησης, δηλαδή βρίσκουμε τον τύπο της $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

**8. Δίνεται η σύνθεση $g\circ f$ και η f(x), ζητείται η g(x).**

Προσπαθώ, μέσα στον τύπο της $(g\circ f)(x)$, να εμφανίσω τον τύπο της f(x). Αν τα καταφέρω, βάζω όπου f(x) το χ και έχω τελειώσει. Αν αυτό δεν είναι δυνατό, ονομάστε ψ το f(x), λύστε ως προς χ και αντικαταστήστε στην αρχική σχέση. Θα βγείτε σε μια συνάρτηση g(ψ) – οπότε βάλτε απλώς όπου ψ το χ.

**9. Μονοτονία συνάρτησης**

Αν η f είναι γνήσια αύξουσα σε ένα διάστημα Α, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ ενώ αν f γνήσια φθίνουσα $x_1<x_2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Προσοχή! Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι ένωση διαστημάτων, τότε πρέπει να βρείτε τη μονοτονία σε κάθε υποδιάστημα.

**10. Συνάρτηση 1-1**

Αν για διαφορετικές τιμές του χ, έχουμε διαφορετικές τιμές του ψ, τότε η f είναι 1-1. Ο έλεγχος για 1-1 συνάρτηση, γίνεται ως εξής: Ξεκινάμε υποθέτοντας ότι $f(x_1)=f(x_2)$ και αποδεικνύουμε ότι αυτό ισχύει μόνο στην περίπτωση όπου $x_1=x_2$. Αν υπάρχουν και άλλες δεκτές λύσεις πλην αυτής, τότε η f δεν είναι 1-1. Επίσης, αν βρείτε δύο συγκεκριμένες τιμές $x_1\neq x_2$ για τις οποίες $f(x_1)=f(x_2)$, τότε η συνάρτηση δεν είναι 1-1.

Όταν μια συνάρτηση είναι 1-1, τότε είναι αντιστρέψιμη. Αν μια συνάρτηση είναι γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα, τότε είναι και 1-1, αλλά δεν ισχύει το αντίστροφο. Αν δίνεται έτοιμη η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, αυτή θα είναι 1-1 μόνο αν οποιαδήποτε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική της σε ένα το πολύ σημείο.

**11. Αντίστροφη συνάρτηση**

Αν μια συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε ορίζεται η αντίστροφη της f , η οποία συμβολίζεται με $f^{-1}$. Η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της αρχικής συνάρτησης και γραφική παράσταση συμμετρική της αρχικής ως προς την ευθεία ψ=χ. Για να βρούμε λοιπόν την αντίστροφη συνάρτηση, κάνουμε τα εξής:

α. Δείχνουμε ότι η f είναι 1-1.

β. Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f, φθάνουμε λοιπόν και σε ένα τύπο της μορφής χ=g(ψ) , τη σχέση δηλαδή όπου έχουμε λύσει ως προς χ.

γ. Η $f^{-1}$ έχει λοιπόν πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών που προσδιορίσατε στο (β) και τύπο που προκύπτει από τη σχέση χ=g(ψ), αν βάλετε όπου ψ το χ, δηλαδή η g είναι τελικά η $f^{-1}$.

**12. Παρατηρήσεις για την αντίστροφη**

α. Ισχύουν οι σχέσεις: $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$

β. Οι συναρτήσεις $f$ και $f^{-1}$ έχουν την ίδια μονοτονία (χρειάζεται απόδειξη).

γ. Αν η f είναι γνήσια αύξουσα, τότε τα κοινά σημεία των f και $f^{-1}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ψ=χ, άρα αν χρειαστεί να βρείτε τα κοινά τους σημεία, μπορείτε να λύσετε το σύστημα μιας από αυτές με την ψ=χ.

**<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΑΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ</u>**

1. Να βρείτε σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις τον τύπο της f(x).

a. Αν $f(x)f(y)=f(x+y-xy)$, $f(1)\neq 0$ και $A_f=\mathbb{R}$.

b. Αν $f(0)=2020$ και $f(x+y)=8xy+f(x-y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

c. Αν $f(x)+f\left(\dfrac{4}{2-x}\right)=x,\quad x\in\mathbb{R}-\{0,2\}$.

d. Αν $f(x)-x\leq x^2\leq f(x-1)+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

e. Αν $f(x)f(y)-xy=f(x)+f(y)-1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

f. Αν $f(x+y)f(x-y)=x^2-y^2$, $\forall\ x,y\in\mathbb{R}$.

Απαντήσεις: a. $f(x)=1$ b. $f(x)=2x^2+2020$ c. $f(x)=\dfrac{x^3-4x+8}{2x(x-2)}$

d. $f(x)=x^2+x$ e. $f(x)=x+1$ ή $f(x)=-x+1$

f. $f(x)=x$ ή $f(x)=-x$ ή $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ ή $f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ -x, & x\geq 0\end{cases}$

2. α. Αν $\exists a>0$ έτσι ώστε $f(x+a)=\dfrac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$ $\forall x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο 2 α.

b. Αν $\exists \alpha > 0$ έτσι ώστε $f(x+\alpha)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}-\{0,1\}$ , να δείξετε ότι η f είναι περιοδική με περίοδο 4α .

3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\boldsymbol{a}.\ f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2+3x+2}\qquad \boldsymbol{b}.\ f(x)=\frac{1-\ln(1-x)}{x^2-x}\qquad \boldsymbol{c}.\ f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{\ln x-1}$$

$$\boldsymbol{d}.\ f(x)=\sqrt{2-\ln 2x}+\sqrt{\ln(x-1)}\qquad \boldsymbol{e}.\ f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^x+2}\qquad \boldsymbol{f}.\ f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$$

$$\boldsymbol{g}.\ f(x)=\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4x+x^2}\qquad \boldsymbol{h}.\ f(x)=\ln(\sqrt{\ln x})\qquad \boldsymbol{i}.\ f(x)=\sqrt{2-\ln x}-\sqrt{e^x-3}$$

$$\boldsymbol{j}.\ f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{3-\ln x}\right)\quad \boldsymbol{k}.\ f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x-2}\quad \boldsymbol{l}.\ f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{|x-3|}}-\sqrt{\frac{x+1}{|x|+1}}\quad \boldsymbol{m}.\ f(x)=(1-\ln x)^{\sqrt{x-2}}$$

Απαντήσεις:

$\boldsymbol{a}.[2,+\infty)$ $\boldsymbol{b}.\ (-\infty,0)$ $\boldsymbol{c}.\ (0,e)\cup(e,+\infty)$ $\boldsymbol{d}.[e+1,e^2/2]$ $\boldsymbol{e}.\ [0,\ln 2]$ $\boldsymbol{f}.\ (-1,3)$

$\boldsymbol{g}.\ (-\infty,-4]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$ $\boldsymbol{h}.\ (1,+\infty)$ $\boldsymbol{i}.\ [\ln 3,e^2]$ $\boldsymbol{j}.\ (2,e^3)$ $\boldsymbol{k}.(0,\frac{1}{e}]\cup[e^2,+\infty)$ $\boldsymbol{l}.\ [2,3)\cup(3,+\infty)$

$\boldsymbol{m}.\ [2,e)$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=\sqrt{x-1},\quad g(x)=\ln(x-2),\quad h(x)=\dfrac{x}{x+1},\quad t(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}.$

Να βρείτε-εφόσον ορίζονται-τις συναρτήσεις: $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ h,\ h\circ t,\ t\circ g,\ h\circ g,\ f\circ t.$

Απαντήσεις:

$f(g(x))=\sqrt{\ln(x-2)-1}$ , $A=[e+2,+\infty)$.

$g(f(x))=\ln(\sqrt{x-1}-2)$ , $A=(5,+\infty)$.

$f(h(x))=\sqrt{\dfrac{-1}{x+1}}$, $A=(-\infty,-1)$.

$$h(t(x))=\frac{\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}}{\sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}}+1},\quad A=(-2,3).$$

$$t(g(x))=\sqrt{\frac{\ln(x-2)+2}{3-\ln(x-2)}},\quad A=[\frac{2e^2+1}{e^2},e^3+2)$$

$$h(g(x)=\frac{\ln(x-2)}{\ln(x-2)+1},\quad A=(2,\frac{1}{e}+2)\cup(\frac{1}{e}+2,+\infty).$$

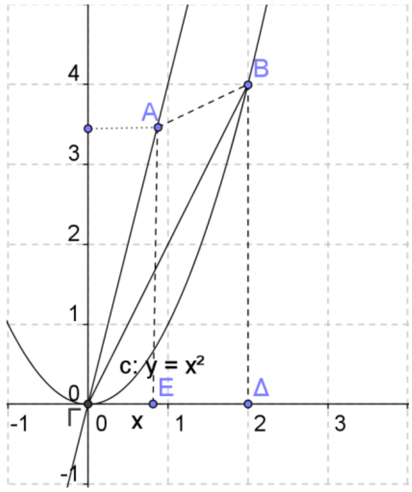
$$f(t(x))=\sqrt{\sqrt{\frac{x+2}{3-x}}-1},\quad A=(\frac{1}{2},3).$$

5. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις, εφόσον βέβαια ορίζεται:

a. $f(x)=1-x^3$ b. $f(x)=x^4,\ x\in[0,2]$ c. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{2-e^x}$

Απαντήσεις: a. $f^{-1}(x)=\begin{cases}-\sqrt[3]{x-1}, & x>1\\ \sqrt[3]{1-x}, & x\le 1\end{cases}$ b. $f^{-1}(x)=\sqrt[4]{x},\ x\in[0,16]$ c. $f^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right), x\in(-\infty,-1)\cup[-\dfrac{1}{2},+\infty)$

6. Η ευθεία έχει εξίσωση y=4x. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΔΕ ως συνάρτηση του x, αν γνωρίζετε ότι τα Β και Δ είναι σταθερά, ενώ το Ε(x,0) κινείται από την αρχή των αξόνων έως το Δ, πάνω στον άξονα xx΄.

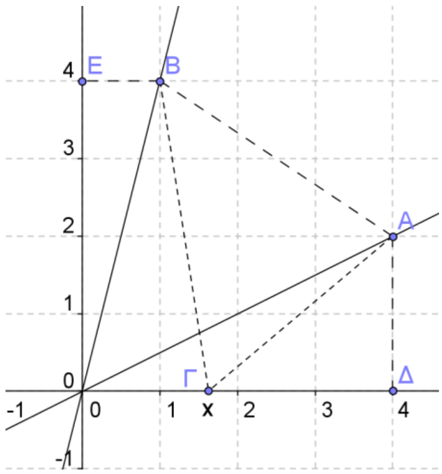



7. Στο διπλανό σχήμα, οι ευθείες ΟΒ και ΟΑ έχουν εξισώσεις y=4x και y=0,5x, αντίστοιχα, ενώ το σημείο Γ(x,0) μπορεί να κινείται πάνω στον οριζόντιο άξονα, στο τμήμα ΟΔ.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του πολυγώνου ΟΕΒΑΔ.

β. Να εκφράσετε τα εμβαδά των ΟΕΒΓ και ΑΓΔ ως συνάρτηση του x.

γ. Να εκφράσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του x.



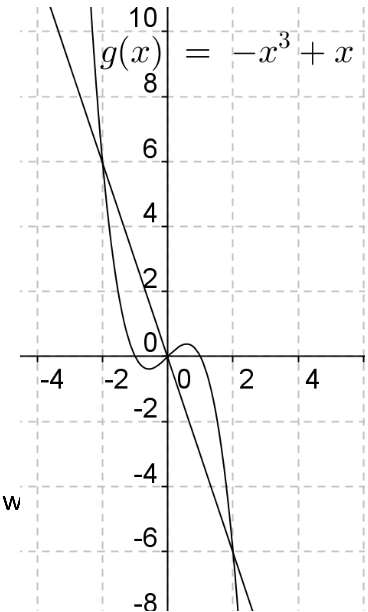

8. Στο διπλανό σχήμα, βλέπετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $g(x)=-x^3+x$ , καθώς και την γραφική παράσταση μιας ευθείας η οποία περνά από την αρχή των αξόνων.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της $g(x)$ με τον οριζόντιο άξονα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας , έστω $f(x)$.

γ. Με τη βοήθεια του σχήματος, να λύσετε τις ανισώσεις:

*i.* $g(x)\ge f(x)$ *ii.* $g(x)\le 6$ *iii.* $-6\le f(x)\le 0$



9. Στο παρακάτω σχήμα, βλέπετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:

$f(x)=2, \quad g(x)=x-2, \quad h(x)=-x+2$.

Αφού βρείτε ποια γραμμή αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση, να λύσετε με τη βοήθεια του σχήματος, τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

a. $g(x)<f(x)$ b. $|h(x)|=f(x)$ c. $|g(x)|\geq f(x)$