ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΓΙΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Εκτός από τις κλασσικές , θυμηθείτε κυρίως τις δύο παρακάτω :

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ $\quad$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, αλλά και την γενικότητα:

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+...+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \nu\in\mathbb{N}.$$

2. ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ορισμοί – σχέσεις – συμπεράσματα)

i. Ισχύουν: $|\alpha|=\begin{cases}-\alpha, & \text{αν } \alpha<0\\ \alpha, & \text{αν } \alpha\geq 0\end{cases}$, $|\alpha|^2=\alpha^2$, $-|\alpha|\leq\alpha\leq|\alpha|$.

ii. Επίσης: $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$, αλλά $||\alpha|-|\beta||\leq|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$.

Στην τελευταία σχέση, τα ίσον ισχύουν αν οι α,β είναι ετερόσημοι ή ομόσημοι.

iii. Ακόμα, αλλάζουμε πρόσημα (όλα!) όποτε θέλουμε: $|\alpha|=|-\alpha|$, $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

iv. Προσοχή!!!!! $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ για κάθε ν άρτιο φυσικό.

v. $|x|+|y|=0\Rightarrow x=0$ και $y=0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν:
$|x|+|y|\leq 0$ ή $x^{2\nu}+y^{2\nu}=0$, δηλαδή $x=y=0$.

vi. $|f(x)|\leq\alpha\Leftrightarrow -\alpha\leq f(x)\leq\alpha$, όπου $\alpha>0$.

vii. $|f(x)|\geq\theta\Leftrightarrow f(x)\geq\theta$ ή $f(x)\leq-\theta$.

3. ΡΙΖΕΣ

Προσοχή στην περίπτωση όπου έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$. Αν το **κ είναι περιττός**, τότε το α είναι απαραίτητα μη αρνητικός και μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή : $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}},\ \nu\in\mathbb{N}^*$.

Αν το κ είναι άρτιος, τότε δεν πρέπει απαραίτητα το α να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, προκειμένου να βγάλουμε τη ρίζα από το συμβολισμό:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\begin{cases}(-\alpha)^{\frac{\kappa}{\nu}}, & \text{αν } \alpha<0\\ \alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}, & \text{αν } \alpha\geq 0\end{cases}$$

Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις γνωστές ιδιότητες , αλλά και τις δύο πιο περίεργες:

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\kappa]{\alpha}}=\sqrt[\nu\kappa]{\alpha}\quad \text{και}\quad \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\kappa\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}\quad \text{ενώ}\quad \alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}\quad \text{για κάθε } \alpha,\beta\geq 0,\ \nu,\kappa\in\mathbb{N}^*.$$

4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

	30^o	45^o	60^o
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0^o	90^o	180^o	270^0
ημ	0	1	0	-1
συν	1	0	-1	0
εφ	0	-	0	-
σφ	-	0	-	0

i. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$ημ^2 x + συν^2 x = 1,\ \ εφx = \frac{ημx}{συνx},\ \ σφx = \frac{συνx}{ημx},\ \ εφx \cdot σφx = 1,\ 1 + εφ^2 x = \frac{1}{συν^2 x},\ 1 + σφ^2 x = \frac{1}{ημ^2 x}$$

ii. Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων:

$$ημx = ημα \Rightarrow x = 2κπ + α \ \ ή \ \ x = 2κπ + π - α$$

$$συνx = συνα \Rightarrow x = 2κπ \pm α$$

$$εφx = εφα \ \ ή \ \ σφx = σφα \Rightarrow x = κπ + α,\ \ όπου\ \ κ \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Προσοχή στις } 2 \text{ περιπτώσεις: } ημx = 0 \Leftrightarrow x = κπ, \quad συνx = 0 \Leftrightarrow x = κπ + \frac{π}{2}$$

iii. Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο

Όταν έχεις π/2 ή 3π/2, αλλάζεις τριγωνομετρικό, αν έχεις π ή 2π, τον αφήνεις ίδιο. Για το πρόσημο, κρίνεις από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεσαι. Παραθέτω μερικούς τύπους , όχι για παπαγαλία, αλλά για να μάθετε τον τρόπο κοιτώντας το 1^o μέλος, να μπορείτε να «βγάλετε» το 2^o και όχι να το θυμηθείτε.

$$ημ(π - x) = ημx,\ \ συν(π - x) = -συνx,\ \ εφ(π + x) = εφx,\ \ σφ(π - x) = -σφx$$

$$συν(π + x) = -συνx,\ \ ημ(-x) = -ημx,\ \ εφ(-x) = -εφx,\ \ σφ(-x) = -σφx,\ αλλά\ \ συν(-x) = συνx$$

$$ημ(\frac{π}{2} - x) = συνx,\ \ συν(π/2 - x) = ημx,\ \ εφ(π/2 + x) = -σφx,\ \ σφ(π/2 - x) = εφx$$

$$συν(3π/2 + x) = ημx,\ \ ημ(\frac{3π}{2} - x) = -συνx,\ \ εφ(\frac{3π}{2} - x) = -σφx,\ \ σφ(\frac{3π}{2} + x) = -εφx$$

5. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

i. $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1,\ \ f: \mathbb{R} \to (0, +\infty),$ f γνήσια αύξουσα αν $a > 1$, γνήσια φθίνουσα αν $0 < a < 1$.

ii. $f(x) = \ln x,\ \ f: (0, +\infty) \to \mathbb{R},$ f γνήσια αύξουσα, $\ln 1 = 0,\ \ln e = 1,\ \ln e^{κάτι} = e^{\ln(κάτι)} = κάτι$

$\ln x + \ln y = \ln(xy),\ \ \ln x - \ln y = \ln(x/y),\ \ \ln x^k = k\ln x.$

6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

i. Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \to \Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, για $\Delta \geq 0$ είναι: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$\alpha x^2+\beta x=0 \Leftrightarrow x(\alpha x+\beta)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

$\alpha x^2+\beta=0$. Λύνουμε ως προς x^2, τη φέρνουμε στη μορφή $x^2=\theta$ και εφόσον $\theta>0$, τότε $x=\pm\sqrt{\theta}$.

Αν θ<0, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, ενώ αν θ=0 η λύση είναι χ=0.

ii. Εξισώσεις 3^{ου} και άνω βαθμού.

Παραγοντοποιούμε και μετατρέπουμε την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων έως δεύτερου βαθμού ή κάνουμε σχήμα Horner.

7. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

i. Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης, μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάξουμε τη φορά, μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό, επίσης χωρίς να αλλάξουμε τη φορά. Αν όμως διαιρέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά. Με σύμβολα:

Αν $\alpha>\beta$, τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$, $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, και εφόσον $\gamma>0$, ισχύει ότι $\alpha\gamma>\beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}$, ενώ, αν $\gamma<0$, είναι $\alpha\gamma<\beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}$.

ii. Μεταξύ των μελών δύο ανισώσεων, σε καμιά περίπτωση δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση. Επιτρέπεται , εφόσον μιλάμε για ομοιόστροφες ανισώσεις, η πρόσθεση κατά μέλη και – με την προϋπόθεση ότι όλα τα μέλη είναι θετικές ποσότητες – ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη. Συμβολικά:

Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$ και , εφόσον $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί, $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$

iii. Ισχύουν επίσης οι σχέσεις: Αν α,β ομόσημοι, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$ και αν α,β θετικοί και ν φυσικός, $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu$.
Τέλος, αν ν περιττός, τότε $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu$ για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

iv. Προσοχή στο εξής: Αν $x>1$, τότε $x^\nu>x$, ενώ, αν $0<x<1$ ισχύει ότι $x^\nu<x$.

v. Για να λύσουμε ανίσωση 2^{ου} βαθμού, θυμόμαστε τις τρεις περιπτώσεις:

- Αν Δ<0, το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, ίδιο με του α. Οπότε η απάντηση στην ανίσωση είναι πως ισχύει για κάθε χ πραγματικό ή πως είναι αδύνατη.
- Αν Δ=0, το τριώνυμο γράφεται σε μορφή ταυτότητας, οπότε είναι $(\kappa x+\lambda)^2 \geq 0$ για κάθε χ.
- Αν Δ>0 ή βρούμε δύο ρίζες (με κοινό παράγοντα, διαφορά τετραγώνων ή «μάτι») τότε πριν απαντήσουμε στην ανίσωση, φτιάχνουμε πινακάκι, όπου για τιμές του χ μεταξύ των ριζών το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α και ομόσημο του α παντού αλλού.

<u>8. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ – ΠΗΛΙΚΟ</u>

Μιλάμε για ανισώσεις της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ ή $\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)}$.

i. Για την μορφή:

$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)\cdot B(x) > 0 \\ B(x) \neq 0 \end{cases}$. Εφόσον τα A(x), B(x) είναι μέχρι δευτέρου βαθμού, φτιάχνουμε πινακάκι και συμπληρώνουμε τα πρόσημα. Αν είναι μεγαλύτερου βαθμού παραγοντοποιούμε ή κάνουμε Horner για να μειώσουμε το βαθμό.

ii. Για την μορφή:

$\frac{A(x)}{B(x)} > \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)} \Leftrightarrow \frac{A(x)}{B(x)} - \frac{\Gamma(x)}{\Delta(x)} > 0$. Κάνουμε ομώνυμα, οπότε το φέρνουμε στη μορφή $\frac{E(x)}{Z(x)} > 0$ και ακολουθούμε την πρώτη περίπτωση.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενο τις παρακάτω παραστάσεις:

a. $8x^3 - 27 =$ b. $x^6 - 8 =$ c. $x^3 - 64 =$ d. $27x^3 + y^3 =$

e. $(2x-1)^2 - 16x^2 =$ f. $(3x+2)^2 - (2x-1)^2 =$

Απαντήσεις : α. $(2x-3)\cdot(4x^2+6x+9)$ β. $(x^2-2)(x^4+2x^2+4)$ γ. $(x-4)(x^2+4x+16)$
δ. $(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$ ε. $(2x-1-4x)(2x-1+4x)=(-1-2x)(6x-1)$
στ. $(3x+2-2x+1)(3x+2+2x-1)=(x+3)(5x+1)$

2. Να συμπληρώσετε με τις κατάλληλες παραστάσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αρχική	Συζυγής	Τελικά
$\sqrt{x^2+4}$		
$\sqrt[5]{x^2}$		
$\sqrt{x+3}-1$		
$2-\sqrt{x-4}$		
$\sqrt{x^2+x}-x$		
$\sqrt[3]{x}-2$		
$\sqrt[3]{x+8}-2$		

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις-ανισώσεις

α. $|2x-3|=1$ b. $|2x-3|=2|x+1|$ c. $|1-4x|=x+2$

d. $|1-2x|\leq 3$ e. $|3-x|\geq 2$ f. $|3x+2|\leq|x+2|$

a. $x=2$, $x=1$ b. $x=\frac{1}{4}$ c. $x=1,\ x=-\frac{1}{5}$ d. $-1\leq x\leq 2$ e. $x\leq 1$ ή $x\geq 5$ f. $-1\leq x\leq 0$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $x^2-2x+5>0$ b. $x^2-2x+5<0$ c. $x^2+4x\ge 0$ d. $x^2-3x\le 0$

e. $2x-4x^2\le 0$ f. $x^2-4x+4<0$ g. $4x^2+12x+9>0$ h. $x^2+4>0$

i. $x^2-x-2<0$ k. $4x^2-9\ge 0$ l. $x^2-7<0$ m. $12-x^2<0$

Απαντήσεις: a. $x\in\mathbb{R}$ b. αδύνατη c. $x\in(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$ d. $x\in[0,3]$

e. $x\in(-\infty,0]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$ f. αδύνατη g. $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ h. $x\notin\mathbb{R}$

i. $x\in(-1,2)$ k. $x\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$ l. $x\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$ m. $(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

5. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε α πραγματικό αριθμό:

α. $ax^2-\left(a+2\right)x+a\le 0$ (Απ: $a\in(-\infty,-\frac{2}{3}]$ b. $x^2-\left(3a-2\right)x+\left(a-1\right)^2\ge 0$ (Απ: $a\in\left[0,\frac{4}{5}\right]$)

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $\eta\mu\left(3\pi-\alpha\right)=$ β. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ γ. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

δ. $\sigma\varphi\left(\chi-5\pi\right)=$ ε. $\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$ ζ. $\sigma\upsilon\nu\left(\alpha-3\pi\right)=$

Απαντήσεις: α. $\eta\mu\alpha$ β. $-\eta\mu\alpha$ γ. $-\sigma\varphi\alpha$ δ. $\sigma\varphi\chi$ ε. $-\sigma\upsilon\nu\alpha$ ζ. $-\sigma\upsilon\nu\alpha$

7. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2<x<3$ και $1<y<4$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $3x-2y$ b. x^2-y^2 c. $10-xy$ d. $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}$ e. $y^2-\frac{12}{x}$

Απαντήσεις: α. $-2<3x-2y<7$ b. $-12<x^2-y^2<8$ c. $-2<10-xy<8$

d. $\frac{5}{3}<\frac{2}{x}+\frac{4}{y}<5$ e. $-5<y^2-\frac{12}{x}<12$

8. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

a. $\frac{x^3-7x+6}{(x+1)^2}\ge 0$ b. $\frac{x^2-x-6}{x^3-8}\le 0$ c. $\frac{2x-1}{x+2}<\frac{2x+3}{x-1}$

Απαντήσεις: a. $x\in(-\infty,-3]\cup[1,2]$ b. $x\in(-\infty,-2]\cup(2,3]$ c. $x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

9. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

α. $ημ2x = 0$ $(x = \frac{κπ}{2})$ β. $συν\frac{x}{2} = 0$ $(x = 2κπ + π)$ γ. $εφ3x = 1$ $(x = \frac{κπ}{3} + \frac{π}{12})$

δ. $ημ2x = συν2x$ $(x = \frac{κπ}{2} + \frac{π}{8})$ ε. $συν2x = -\frac{1}{2}$ $(x = κπ \pm \frac{π}{3})$

στ. $ημ3x = -συν3x$ $(x = \frac{κπ}{3} - \frac{π}{12})$ ζ. $ημ2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(x = κπ - \frac{π}{6}$ ή $x = κπ + \frac{2π}{3})$

η. $ημ^2x - 3ημx + 2 = 0$ $(x = κπ + \frac{π}{2})$ θ. $ημ3x = -συνx$ $(x = κπ - \frac{π}{4}$ ή $x = \frac{κπ}{2} + \frac{3π}{8})$

10. Να λύσετε τις παρακάτω ομάδες εξισώσεων – ανισώσεων:

a. $\begin{cases} x^2 - |x| - 2 = 0 \\ e^{2x} - e^x - 2 = 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 2 = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x^2 - |x| - 2 \le 0 \\ e^{2x} - e^x - 2 \ge 0 \\ \ln^2 x - \ln x - 2 > 0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x^3 - 7x + 6 = 0 \\ \ln^3 x - 7\ln x + 6 = 0 \\ e^{3x} - 7e^x + 6 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^3 - 7x + 6 < 0 \\ \ln^3 x - 7\ln x + 6 \le 0 \\ e^{3x} - 7e^x + 6 \ge 0 \end{cases}$ e. $\begin{cases} (x-2)^2 + 2|x-2| = 0 \\ (e^x - 1)^2 + 2|e^x - 1| = 0 \\ (\ln x + 2)^2 - 2|\ln x + 2| = 0 \end{cases}$ f. $\begin{cases} (x-2)^2 + 2|x-2| \le 0 \\ (e^x - 1)^2 + 2|e^x - 1| > 0 \\ (\ln x + 2)^2 - 2|\ln x + 2| \le 0 \end{cases}$

Απαντήσεις:

a. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = \pm 2$, $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$, $x = \frac{1}{e}$ ή $x = e^2$ b. $x \in [-2, 2]$, $x \in [\ln 2, +\infty)$, $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e^2, +\infty)$

c. $x = -3$ ή $x = 1$ ή $x = 2$, $x = \frac{1}{e^3}$ ή $x = e$ ή $x = e^2$, $x = 0$ ή $x = \ln 2$

d. $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$, $x \in (0, \frac{1}{e^3}] \cup [e, e^2]$, $x \in (-\infty, 0] \cup [\ln 2, +\infty)$

e. $x = 2$, $x = 0$, $x = \frac{1}{e^2}$ ή $x = 1$ ή $x = \frac{1}{e^4}$ f. $x = 2$, $x \in \mathbb{R}^*$, $x \in [\frac{1}{e^4}, 1]$

11. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \le 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 2)$

β. $\frac{x + 3}{x^2 - 3x + 2} > 0$ Απαντ.: $x \in (-3, 1) \cup (2, +\infty)$

γ. $\frac{x - 4}{x^2 - x} \ge -1$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -2] \cup (0, 1) \cup [2, +\infty)$

δ. $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \ge 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty)$

ε. $\frac{|x| - 2}{x^2 - 5x + 6} \le 0$ Απαντ.: $x \in [-2, 2) \cup (2, 3)$

12. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2<x<3$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι ποσότητες:

α. $-2x-y^2$ Απ: $(-5,2)$ β. $\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}$ Απ: $(-1,\dfrac{1}{2})$ γ. y^3-x^2+1 Απ: $(-7,5)$

13. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $3<|1-2x|<5$ $\quad (x\in(-2,-1)\cup(2,3))$

b. $|x^2-3x+1|\le 1$ $\quad \left(x\in[0,1]\cup[2,3]\right)$

c. $e^{2x-1}-e^{x+1}<0$ $\quad \left(x\in(-\infty,2)\right)$

d. $\ln^2(x-\ln 2+1)+(e^x-2)^2\le 0$ $\quad \left(x=\ln 2\right)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ</u>

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

a. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-2}}{x^2+3x+2}$ b. $f(x)=\dfrac{1-\ln(1-x)}{x^2-x}$ c. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-x+2}}{\ln x-1}$

d. $f(x)=\sqrt{2-\ln 2x}+\sqrt{\ln(x-1)}$ e. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^x+2}$ f. $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-x}{x+1}\right)$

g. $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4x+x^2}$ h. $f(x)=\ln(\sqrt{\ln x})$ i. $f(x)=\sqrt{2-\ln x}-\sqrt{e^x-3}$

j. $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-2}{3-\ln x}\right)$ k. $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x-2}$ l. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{|x-3|}}-\sqrt{\dfrac{x+1}{|x|+1}}$

Απαντήσεις:

a. $[2,+\infty)$ b. $(-\infty,0)\cup(0,1)$ c. $(0,e)\cup(e,+\infty)$ d. $[2,e^2/2]$ e. $[0,\ln 2]$ f. $(-1,3)$
g. $(-\infty,-4]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$ h. $(1,+\infty)$ i. $[\ln 3,e^2]$ j. $(2,e^3)$ k. $(0,1/e]\cup[e^2,+\infty)$
l. $[2,3)\cup(3,+\infty)$