

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πώς ορίζεται η σύνθεση μιας συνάρτησης f με μια συνάρτηση g ; (Μονάδες 3)
- A2.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο \mathbb{R} , τότε η αντίστροφή της είναι γνήσια φθίνουσα στο \mathbb{R} ». Να τον χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» (Μονάδα 1) και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 3)
- A3.** Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι άξονας συμμετρίας των f και f^{-1} (Μονάδες 8)
- A4.** Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:
- α. Μια 1-1 συνάρτηση σε ένα διάστημα A είναι και γνήσια μονότονη στο A .
- β. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες στο \mathbb{R} , τότε και η σύνθεσή τους είναι ορισμένη πάντα στο \mathbb{R} .
- γ. Η προβολή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης στον κατακόρυφο άξονα είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- δ. Μια άρτια συνάρτηση δεν είναι ποτέ 1-1.
- ε. Για μια περιττή συνάρτηση f για την οποία γνωρίζουμε ότι το 0 περιλαμβάνεται στο πεδίο ορισμού της, ισχύει πάντοτε $f(0)=0$. (Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{a-x}{a+x+1}\right)$, $a > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(a-1, \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι $a=2$ (Μονάδες 4) και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (Μονάδες 3).
- B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(-3,2)$. (Μονάδες 8)
- Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = f(2x) - f(1-x)$
- B3.** i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g , αν γνωρίζετε ότι η f είναι ορισμένη στο $(-3,2)$. (Μονάδες 5)
- ii. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης g . (Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \leq 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 7)
- Γ2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (Μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφή της (Μονάδες 6)
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι $f(1+e^x) > f(1-x^2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8).

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-1}$, $x \in [1, +\infty)$ και $g(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- Δ1.** Να βρείτε τη συνάρτηση h , όπου $h(x) = (f \circ g)(x)$ (Μονάδες 4) και να αποδείξετε ότι η ευθεία $x=0$ είναι άξονας συμμετρίας για την συνάρτηση h . (Μονάδες 4)
- Δ2.** Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης h . (Μονάδες 7)
- Δ3.** Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{2 - \sin^2 x} - \sin x < \sqrt{2 - \eta\mu^2 x} - \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (Μονάδες 10)