Απαντήσεις στο ΕΠΙ - 2324

Α2. Ψευδής. Για παράδειγμα, η $f(x)=2x-3$ είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ενώ η αντίστροφη της $f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2}$ είναι επίσης γν. αύξ.

Α4. Λάθος - Σωστό - Σωστό - Σωστό - Σωστό.

ΘΕΜΑ Β.

Β1. Είναι $f(\alpha-1)=\ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\alpha-\alpha+1}{\alpha+\alpha-1+1}\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2\alpha}\right)=\ln\left(\frac{1}{4}\right)$
$\Leftrightarrow 2\alpha=4 \Leftrightarrow \alpha=2$.
Συνεπώς $f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$. Ζητώ $\frac{2-x}{x+3}>0 \Rightarrow (2-x)(x+3)>0$
άρα $x\in(-3,2)$, συνεπώς $A_f=(-3,2)$

Β2. $f(x)=\ln\left(-\frac{x-2}{x+3}\right)=\ln\left(-\frac{x+3-5}{x+3}\right)=\ln\left(-1+\frac{5}{x+3}\right)$.
Έστω $x_1,x_2\in(-3,2)$ με $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+3<x_2+3 \Rightarrow \frac{1}{x_1+3}>\frac{1}{x_2+3}$
$\Rightarrow -1+\frac{5}{x_1+3}>-1+\frac{5}{x_2+3} \overset{\ln\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1)>f(x_2)$ δηλ. f γν. φθίνουσα.

Β3. i) Πρέπει $-3<2x<2 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<1$ και $-3<1-x<2 \Rightarrow$
$-4<-x<1 \Leftrightarrow 4>x>-1$ συνεπώς $A_g=(-1,1)$.

ii) Έστω $x_1<x_2 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(2x_1)>f(2x_2)$ και $-x_1>-x_2 \Leftrightarrow 1-x_1>1-x_2$
$\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1-x_1)<f(1-x_2) \Leftrightarrow -f(1-x_1)>-f(1-x_2)$ συνεπώς
προσθέτοντας κατά μέλη $g(x_1)>g(x_2)$ δηλ. g γν. φθίνουσα.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. Η απόδειξη είναι εύκολη με την κατασκευή της γρ. παράστασης της συνάρτησης f. Διαφορετικά, βρίσκουμε τη μονοτονία στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $(1,+\infty)$ με τον ορισμό.

Γ2. Έστω $x\le 1 \Leftrightarrow x-1\le 0 \Leftrightarrow (x-1)^3\le 0$ άρα $f((-\infty,1])=(-\infty,0]$
Αν $x>1 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow (x-1)^2>0$ άρα $f((1,+\infty))=(0,+\infty)$
Συνεπώς το σύνολο τιμών της $f=\mathbb{R}$.
Για να βρούμε την αντίστροφη της: $y=(x-1)^3 \overset{y<0}{\Rightarrow} x-1=-\sqrt[3]{-y}$
$x=1-\sqrt[3]{-y}$. $y=(x-1)^2 \Rightarrow |x-1|=\sqrt{y} \Rightarrow x=1+\sqrt{y}$

άρα $f^{-1}(x)=\begin{cases} -\sqrt[3]{x}+1, & x\le 0 \\ \sqrt{x}+1, & x>0 \end{cases}$

Γ3. Η f είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεπώς η ανίσωση
$f(e^x+1) > f(1-x^2)$ γίνεται $1+e^x > 1-x^2 \Rightarrow e^x > -x^2$
που ισχύει γιατί $e^x > 0$ ενώ $-x^2 \leq 0$.

ΘΕΜΑ Δ.

Δ1. $A_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R}$ και $(x^2+1) \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R}$ και $x^2 \geq 0\} = \mathbb{R}$

με $f(g(x)) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1-1} = \sqrt{x^2+1} + |x|$, $x \in \mathbb{R}$.

Επίσης $f(g(-x)) = \sqrt{(-x)^2+1} + |-x| = \sqrt{x^2+1} + |x| = f(g(x))$

δηλ. η $h(x) = (f\circ g)(x)$ είναι άρτια με άξ. συμμ. τον $y'y$.

Δ2. $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - x, & x<0 \\ \sqrt{x^2+1} + x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Έστω $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 > 0 \Rightarrow x_1^2+1 > x_2^2+1$
$\Rightarrow \sqrt{x_1^2+1} - x_1 > \sqrt{x_2^2+1} - x_2 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2) \Rightarrow h \searrow$ στο $(-\infty, 0)$.

Αν $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow h \nearrow$ στο $[0, +\infty)$

Δ3. Η δοσμένη ανίσωση γράφεται: $\sqrt{1+\eta\mu^2 x} + \eta\mu x < \sqrt{1+\sigma\upsilon\nu^2 x} + \sigma\upsilon\nu x$
$\Leftrightarrow h(\eta\mu x) < h(\sigma\upsilon\nu x)$. Επειδή $x \in [0, \pi/2]$, $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x \geq 0$
άρα η $h \nearrow$ δηλ. $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$.

Στο $[0, \pi/2]$, $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ για $x = \pi/4$.

Αν $0 \leq x \leq \pi/4 \xRightarrow{\eta\mu \nearrow} 0 \leq \eta\mu x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\xRightarrow[\sigma\upsilon\nu \searrow]{} 1 \geq \sigma\upsilon\nu x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ δηλ. $\eta\mu x < \sigma\upsilon\nu x$ για $x \in [0, \pi/4)$

Ενώ $\eta\mu x \geq \sigma\upsilon\nu x$ για $x \in [\pi/4, \pi/2]$.

Η λύση προκύπτει εύκολα και με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων για $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$.