ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΓΕΠ3 – 2223

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να αποδείξετε ότι: $f'(x_o) = 0$
(8 Μονάδες)

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [α, β]. Πότε θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο [α, β];
(3 Μονάδες)

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια πολυωνυμική συνάρτηση τρίτου βαθμού έχει πάντα ακριβώς ένα σημείο καμπής». Να τον χαρακτηρίσετε ως Αληθή ή Ψευδή **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας **(3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και g συνεχής στο $f(x_o)$ τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο x_0

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

δ. Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης είναι το ολικό της ελάχιστο.

ε. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε η C_f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

(10 Μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x - 1, \ x \in [-2, +\infty)$

Β1. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}. **(6 Μονάδες)**

Έστω $f^{-1}(x) = \sqrt{x+5} - 2, \ x \in [-5, +\infty)$

Β2. Να βρείτε – αν υπάρχουν - τα κοινά σημεία των συναρτήσεων f, f^{-1} και το διάστημα στο οποία η f^{-1} είναι «πάνω» από τη συνάρτηση f. **(6 Μονάδες)**

Β3. Αν $g(x) = \ln x - 5, \ x \in (0, +\infty)$, να ορίσετε την συνάρτηση φ με τύπο: $\varphi(x) = (f^{-1} \circ g)(x)$
(3 Μονάδες)

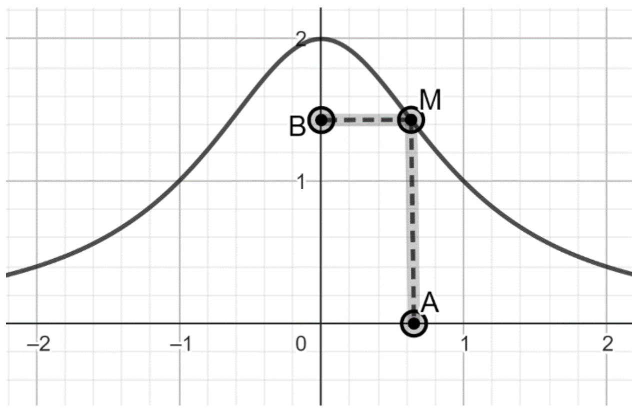
Β4. Έστω ότι $\varphi(x) = \sqrt{\ln x} - 2, \ x \in [1, +\infty)$

i. Να βρείτε τη μονοτονία και την κυρτότητα της συνάρτησης φ. **(5 Μονάδες)**

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ στο (1, e) ώστε $\varphi'(\xi) = \dfrac{1}{e-1}$ **(5 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$, F(x) μια αρχική της και ένα σημείο M(x, f(x)) , x>0. Το σημείο M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ενώ η προβολή του M στον χ΄χ κινείται με ταχύτητα 2μ/s.



Αν Α και Β είναι οι προβολές του M στους χχ΄, ψ΄ψ αντίστοιχα, τότε:

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου OAMB γίνεται μέγιστο για x=1. **(6 μονάδες)**

Γ2. Αν d(x) είναι η απόσταση του M από την αρχή των αξόνων, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης αυτής τη χρονική στιγμή που το εμβαδόν του ορθογωνίου OAMB γίνεται μέγιστο. **(6 μονάδες)**

Γ3. i. Να βρείτε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της F, τον χχ΄, τον ψψ΄ και την ευθεία x=α, α>0, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι F(x)>0 για κάθε χ>0 και F(α)=α. **(7 μονάδες)**

ii. Να βρείτε το : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$ **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=2e^{x-3}-x^2+6x-11,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να ελέγξετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **(4 μονάδες)**

Δ2. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{f(x)}>f^2(x)+1$ **(8 μονάδες)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{f(x)+6}{x}+\dfrac{x-f(2x)}{x-3}=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,3). **(6 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $\int_1^e f(x+3)\ln x\,dx<\dfrac{e^2+1}{2}$ **(7 μονάδες)**