Απαντήσεις ΓΕΠ 3 - 2223

A3. Αληθής. Αν $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $f''(x)=6\alpha x+2\beta$ με $\alpha\neq 0$, σημ. καμπής στο $x_0=-\dfrac{\beta}{3\alpha}$.

A4. Λάθος - Λάθος - Λάθος - Λάθος - Σωστό.

ΘΕΜΑ Β.

B1. $f(x)=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$ και $f'(x)=2(x+2)>0$ για $x>-2$ άρα $f\nearrow$ δηλαδή f 1-1

Αν $x\in[-2,+\infty) \Rightarrow f(x)\in[-5,+\infty)$ αφού $f\nearrow$, δηλαδή $A_{f^{-1}}=[-5,+\infty)$ και $y=(x+2)^2-5 \Rightarrow |x+2|=\sqrt{y+5} \rightarrow$ $(x\geq -2)$ $x=\sqrt{y+5}-2$ άρα $f^{-1}(x)=\sqrt{x+5}-2$, $x\in[-5,+\infty)$

B2. Αφού $f\nearrow$, τα κοινά σημεία των f, f^{-1} βρίσκονται πάνω στην $y=x$, δηλαδή: $f(x)=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow$ $x^2+3x-1=0$, $\Delta=13$ $x_{1,2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$, δεκτή η τιμή: $x=\dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$.

Επειδή f κυρτή και f^{-1} κοίλη (πρόσημο της f'', $f^{-1''}$) $f(x)>x>f^{-1}(x)$ για $x\in\left[-2, \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}\right)$.

B3. Το πεδίο ορισμού της $f^{-1}\circ g=\{x\in(0,+\infty)$ και $g(x)\geq -5\}$ δηλ. $\ln x-5\geq -5 \Rightarrow \ln x\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$ άρα $A_\varphi=[1,+\infty)$

με τύπο: $\varphi(x)=f^{-1}(g(x))=f^{-1}(\ln x-5)=\sqrt{\ln x}-2$, $x\in[1,+\infty)$.

B4. $\varphi'(x)=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}>0$ $\forall x>1$, $\varphi''(x)=-\dfrac{2\ln x+1}{4x^2\ln x\sqrt{\ln x}}<0$ άρα φ γν. αύξουσα και κοίλη.

ii) φ συν. στο $[1,e]$, παράγ. στο $(1,e)$ άρα (ΘΜΤ) $\exists\,\xi\in(1,e)$ ώστε $\varphi'(\xi)=\dfrac{\varphi(e)-\varphi(1)}{e-1}=\dfrac{1}{e-1}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή $A(x,0)$, $B\left(0, \frac{2}{x^2+1}\right)$, $M\left(x, \frac{2}{x^2+1}\right)$ το εμβαδόν του ορθογωνίου $OAMB = \frac{2x}{x^2+1}$. Έστω $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\rightarrow$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

x	0		1	
f'		+		−
f		$\nearrow$		$\searrow$

άρα η f έχει μέγιστο για $x=1$.

Γ2. $OM = d(x) = \sqrt{x^2 + f^2(x)}$ με $x'(t) = 2$ μ/s $x(t_0) = 1$ και $d(t_0) = \sqrt{2}$. Είναι $d^2(t) = x^2(t) + f^2(t)$ $\Rightarrow$

$2d(t)\cdot d'(t) = 2x(t)\,x'(t) + 2f(t)\cdot f'(t)$ με $f'(t) = \left(\frac{2x(t)}{x^2(t)+1}\right)'$

$= 2\cdot \frac{x'(t)(x^2(t)+1) - 2x(t)\cdot x'(t)}{(x^2(t)+1)^2}$ άρα: $f(t_0) = 1$, $f'(t_0) = 0$

Συνεπώς για $t = t_0$: $\cancel{2}\, d(t_0)\cdot d'(t_0) = \cancel{2}\, x(t_0)\cdot x'(t_0)$ $\Rightarrow$

$d'(t_0) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ μ/s.

Γ3. i. $E(\alpha) = \int_0^\alpha F(x)\,dx = \int_0^\alpha x' F(x)\,dx = \left[xF(x)\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha x f(x)\,dx$

$= \alpha F(\alpha) - \int_0^\alpha \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \alpha F(\alpha) - \left[\ln(x^2+1)\right]_0^\alpha =$

$\alpha^2 - \ln(\alpha^2+1)$

ii) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \left[\alpha^2 - \ln(\alpha^2+1)\right] = \lim\limits_{\alpha\to+\infty} \alpha^2\cdot\left[1 - \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha^2}\right]$.

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\ln(\alpha^2+1)}{\alpha^2} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{\frac{2\alpha}{\alpha^2+1}}{2\alpha} = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{1}{\alpha^2+1} = 0$$

άρα $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} E(\alpha) = +\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x) = 2e^{x-3} - 2x + 6$, $f''(x) = 2e^{x-3} - 2$ και είναι

$f''(x) > 0 \Rightarrow e^{x-3} > 1 \Rightarrow x > 3$ ενώ $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 3$

και $f''(3) = 0$, άρα η f έχει καμπή στο $(3,0)$ και η

εφ/νη στο $(3,2)$ είναι η $y - 0 = 2(x-3) \Rightarrow y = 2x - 6$

Δ2. Έστω $h(x) = e^x - x^2 - 1$, $h'(x) = e^x - 2x$, $h''(x) = e^x - 2$

x		$\ln 2$	
h''	$-$	0	$+$
h'	$\searrow$		$\nearrow$

Η $h'(x)$ έχει ελάχιστο για $x = \ln 2$ το

$h'(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 = \ln(e^2) - \ln 4 > 0$

άρα $h'(x) > 0$ δηλ. η $h(x)$ γν. αύξουσα.

Η ανίσωση $e^{f(x)} > f^2(x) + 1 \Leftrightarrow h(f(x)) > 0 = h(0) \Leftrightarrow$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(3)$. $(*)$

Όμως η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα γιατί:

x		3	
f''	$-$	0	$+$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

η f' έχει ελάχιστο για $x = 3$ το $f'(3) = 2$

δηλ. $f'(x) > 0$ άρα $f \uparrow$.

Συνεπώς η $(*)$ γίνεται: $f(x) > f(3) \Leftrightarrow x > 3$.

Δ3. Έστω $g(x) = (x-3)(f(x)+6) + x(x - f(2x))$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0,3]$ άρα $g(0) = -3\cdot(f(0)+6)$

και $g(3) = 3(3 - f(6))$. Επειδή η f είναι κοίλη στο $(0,3)$

$f(x) < 2x - 6$ άρα $f(0) < -6$ και $f(6) = 2e^3 - 11 \Rightarrow 3 - f(6) = 14 - 2e^3 < 0 \Rightarrow$

$g(3)\cdot g(0) < 0 \xRightarrow{(\Theta B)} \exists\, x_0 \in (0,3)$ ώστε $g(x_0) = 0$.

Δ4. Επειδή στο $[1,e]$ η f κοίλη $\Rightarrow f(x) < 2x - 6 \Rightarrow$

$f(x+3) < 2x \Rightarrow f(x+3)\cdot \ln x < 2x \cdot \ln x \Rightarrow$

$$\int_1^e f(x+3)\ln x\,dx < \int_1^e 2x\ln x\,dx = [x^2 \ln x]_1^e - \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2+1}{2}$$