ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΙΝΙ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΑΠΡΙΛΗΣ 2023

ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο [α, β] ; **(3 μονάδες)**

Α2. Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο [α ,β] για την οποία υπάρχει σημείο x_o στο (α, β) ώστε f '(x)>0 στο (α, x_o) και f ' (x)<0 στο (x_o , β) , έχει τοπικό μέγιστο στο x_o . **(8 μονάδες)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση συνεχής στο [α, β] για την οποία ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και για μια τουλάχιστον τιμή στο [α, β] δεν μηδενίζεται, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)» . Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον παραπάνω ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}=1$

2. Μια συνάρτηση συνεχής στο R , μπορεί να έχει οριζόντια και κατακόρυφη ασύμπτωτη.

3. Αν μία συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

4. Μία συνάρτηση $f: A \to R$ είναι συνάρτηση 1-1 αν και μόνο αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή αν $x_1 = x_2$ τότε $f(x_1) = f(x_2)$

5. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι 0 λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο Δ. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Β1. Να βρείτε μονοτονία, ακρότατα , κυρτότητα και σημεία καμπής της συνάρτησης f. **(8 μονάδες)**

Β2. Να βρείτε την εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο x_o=2 και να υπολογίσετε – αν υπάρχει – το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{e^2 f(x)+x-4}$ **(6 μονάδες)**

Β3. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(α), α>0, του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες χ=0 και χ=α, δίνεται από τον τύπο: $E(\alpha) = -(1+\alpha)e^{-\alpha}+1$ και να βρείτε το $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$ **(5+2=7 μονάδες)**

Β4. Να αποδείξετε ότι για κάθε β>2, ισχύει ότι: $f(\beta+1)-f(\beta) < f'(\beta+1)$ **(4 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{x^2}, \quad x \in (0,+\infty)$

Γ1. Να δείξετε ότι f(x)>0 και γνήσια φθίνουσα για κάθε $x \in (0,+\infty)$. **(2+5=7 μονάδες)**

Γ2. Να λυθεί η ανίσωση: $\ln(1+f(x))-\ln(f(x)) > f^2(x)\cdot f(\ln 2)$ **(6 μονάδες)**

Γ3. Αν F μια αρχική της f , να λυθεί η εξίσωση: $F(x^4+4)+F(x^2+2)=F(x^4+2)+F(x^2+4)$ **(6 μονάδες)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ανάμεσα στη γραφική παράσταση της f , τον χ΄χ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\dfrac{1}{2}$ και $x=1$ ισούται με $\ln\left(\dfrac{27}{4e}\right)$. **(6 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=x^2+e^{-x}-3,\ x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_o στο (0,1) ώστε η f να έχει ελάχιστο στο x_o και να δείξετε ότι $f(x_o)=x_o^2+2x_o-3$. **(7 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2 με $|x_1|<1<|x_2|$. **(7 μονάδες)**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)\cdot e^{f(x_o)}=f(x_o)\cdot e^{f(x)}$. **(6 μονάδες)**

Δ4. Αν g είναι μια παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση για την οποία ισχύει $g(2x)\geq g(e^{-x})$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $g'(2x_o)=0$. **(5 μονάδες)**