Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα Δ. **(7 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Σχολικό βιβλίο , σελ. 135

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του. **(4 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Σχολικό βιβλίο , σελ. 128

Α3. Δίνεται η πρόταση: «Έστω μια συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει ότι $f''(x_0)=0$. Τότε το x_0 είναι σημείο καμπής για τη συνάρτηση f ». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. **(1+3 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

ΨΕΥΔΗΣ . Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^4$, $x\in\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x)=12x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Ισχύει $f''(0)=0$, αλλά η f δεν έχει σημεία καμπής καθώς είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β. Μια συνάρτηση γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα Δ , είναι αντιστρέψιμη.

γ. Μια συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα Δ , έχει σύνολο τιμών επίσης ένα ανοικτό διάστημα f(Δ).

δ. Αν f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο x_0 , τότε και η $(f\circ g)$ είναι συνεχής στο x_0.

ε. Η εφαπτομένη μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σε σημείο καμπής της, «διαπερνά» την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. **(10 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

α. **Σ** (π.χ. $f(x)=\begin{cases} x, & x\in[-1,0] \\ \frac{1}{x}, & x\in(0,1] \end{cases}$) , β. **Σ** , γ. **Λ** , δ. **Λ** , ε. **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\dfrac{x^2-2x+5}{x-1}$, $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

Β1. Να βρείτε τη μονοτονία και την κυρτότητα της συνάρτησης f καθώς και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της, αν υπάρχουν. **(12 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $A_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=3$ και $f'(x)>0\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>3$, άρα $f\nearrow(-\infty,-1], f\searrow[-1,1), f\searrow(1,3], f\nearrow[3,+\infty)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=-4$ και τοπικό ελάχιστο για $x=3$, το $f(3)=4$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ με $f''(x)=\dfrac{8}{(x-1)^3}$, άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,1)$ και κυρτή στο $(1,+\infty)$. Η f δεν έχει σημεία καμπής.

Β2. Να βρείτε- αν υπάρχουν - ασύμπτωτες για τη συνάρτηση f και να κατασκευάσετε μια πρόχειρη γραφική της παράσταση. **(3+5=8 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $A_f=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, οπότε για κατακόρυφη ασύμπτωτη ψάχνουμε μόνο στο $x_0=1$.

Ισχύει $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(x^2-2x+5)\dfrac{1}{x-1}=+\infty$, άρα η $\varepsilon_1: x=1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

και $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x^2-2x+5)\dfrac{1}{x-1}=-\infty$.

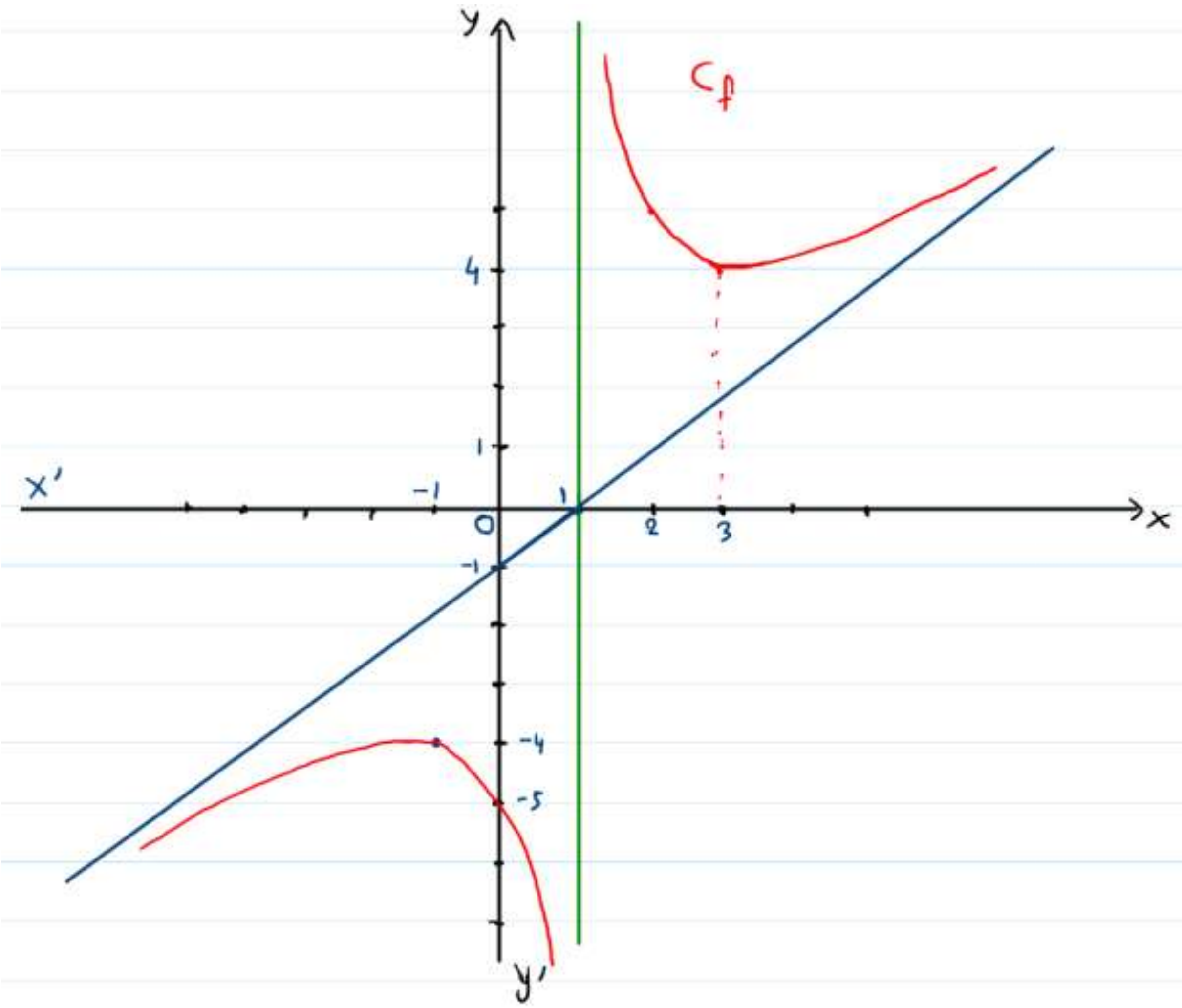
Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+5}{x-1}=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-x+5}{x-1}=-1$, άρα η $\varepsilon_2: y=x-1$ πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και $-\infty$.

Επίσης βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, σημείο τομής C_f με $y'y$ το $A(0,-5)$ καθώς $f(0)=-5$, ενώ η C_f δεν τέμνει τον $x'x$.

Σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών της f .

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

και σχεδιάζουμε τη γραφική της παράσταση.



Β3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x)=α, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. **(5 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

- Αν $\alpha \in (-\infty,-4) \cup (4,+\infty)$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει δύο ρίζες.
- Αν $\alpha=-4$ ή $\alpha=4$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μία ρίζα .
- Αν $\alpha \in (-4,4)$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ για την οποία ισχύει η σχέση:

$f(x)(f(x)-4)=5-x^2$, για κάθε $x \in \Delta$. (1)

Γ1. Να δείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής. **(6 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in \Delta$: $f(x)(f(x)-4)=5-x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)=5-x^2$.

Επειδή οι συναρτήσεις $f^2(x)-4f(x)$, $5-x^2$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ έχουμε

$(f^2(x)-4f(x))'=(5-x^2)' \Rightarrow 2f(x)f'(x)-4f'(x)=-2x \Rightarrow f(x)f'(x)-2f'(x)=-x$, για κάθε $x \in \Delta$

και επειδή οι συναρτήσεις $f(x)f'(x)-2f'(x),-x$ είναι παραγωγίσιμες στο Δ έχουμε

$(f(x)f'(x)-2f'(x))'=(-x)' \Rightarrow (f'(x))^2+f(x)f''(x)-2f''(x)=-1$, (2) για κάθε $x \in \Delta$.

Έστω ότι το $A(x_0,f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ.

Τότε θα ισχύει $f''(x_0)=0$, οπότε η (2) δίνει :

$(f'(x_0))^2+f(x_0)f''(x_0)-2f''(x_0)=-1 \Rightarrow (f'(x_0))^2=-1$ ΑΤΟΠΟ

Άρα η f δεν έχει σημεία καμπής .

Έστω ότι η f είναι ορισμένη και συνεχής στο [-3,3] και ισχύει για αυτήν ότι f(0)=5 καθώς και η σχέση (1).

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=2+\sqrt{9-x^2}$, $x \in [-3,3]$. **(6 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in [-3,3]$: $f(x)(f(x)-4)=5-x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)=5-x^2 \Leftrightarrow f^2(x)-4f(x)+4=9-x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (f(x)-2)^2=9-x^2 \Leftrightarrow |f(x)-2|=\sqrt{9-x^2}$ **(3)**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2$, $x \in [-3,3]$ η οποία είναι συνεχής , $g(-3)=g(3)=0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$. Άρα η g διατηρεί πρόσημο στο $(-3,3)$ και αφού $g(0)=5-2=3>0$ ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x \in (-3,3)$.

Οπότε για κάθε $x\in(-3,3)$ **(3):** $|g(x)|=\sqrt{9-x^2}\overset{g(x)>0}{\Rightarrow} g(x)=\sqrt{9-x^2}$ και επειδή $g(-3)=g(3)=0$ για κάθε $x\in[-3,3]$ είναι $g(x)=\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow f(x)-2=\sqrt{9-x^2}\Leftrightarrow f(x)=2+\sqrt{9-x^2}$, $x\in[-3,3]$.

Γ3. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f. **(6 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $[-3,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ με $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$. Οπότε

$$\left.\begin{cases} f \text{ συνεχής } [-3,0] \\ f'(x)>0 \quad \forall x\in(-3,0)\end{cases}\right\}\Rightarrow f\nearrow[-3,0] \text{ και } \left.\begin{cases} f \text{ συνεχής } [0,3] \\ f'(x)<0 \quad \forall x\in(0,3)\end{cases}\right\}\Rightarrow f\searrow[0,3]$$

Η f παρουσιάζει τοπ. μέγιστο (και ολικό) για $x_1=0$ το $f(0)=5$ και τοπ. ελάχιστο (και ολικό) για $x_2=-3$ και $x_3=3$ το $f(-3)=f(3)=2$.

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο της $(\sqrt{5},f(\sqrt{5}))$ και να βρείτε - αν υπάρχει - το όριο: $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{e^{-2023}}{2f(x)+\sqrt{5}\cdot x-13}$ **(2+5=7 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Στο σημείο $B\left(\sqrt{5},f\left(\sqrt{5}\right)\right)$ η εφαπτομένη (ε) της C_f έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon):\ y-f\left(\sqrt{5}\right)=f'\left(\sqrt{5}\right)\left(x-\sqrt{5}\right)\Rightarrow y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{13}{2}$$

Η f είναι συνεχής στο $[-3,3]$ με $f''(x)=\dfrac{-9}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3}<0$ για κάθε $x\in(-3,3)$, άρα η f είναι κοίλη στο $[-3,3]$, οπότε $f(x)\le-\dfrac{\sqrt{5}}{2}x+\dfrac{13}{2}\Rightarrow 2f(x)+\sqrt{5}x-13\le0$, $\forall x\in[-3,3]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x_0=\sqrt{5}$. Επειδή $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\left(2f(x)+\sqrt{5}x-13\right)=0$ και $2f(x)+\sqrt{5}x-13<0$ κοντά στο $x_0=\sqrt{5}$, είναι $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{1}{2f(x)+\sqrt{5}x-13}=-\infty$ και αφού $e^{-2023}>0$ έχουμε $\lim\limits_{x\to\sqrt{5}}\dfrac{e^{-2023}}{2f(x)+\sqrt{5}x-13}=-\infty$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)}{h^2}=f'(x)+1$ για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι έχει ελάχιστο στο x=0 την τιμή 0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^x-x-1,\ x\in\mathbb{R}$ **(9 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$ το 0 , ισχύει $f(0)=0$ και $f'(0)=0$ (Θ. Fermat).

Επειδή η f είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) το δεδομένο όριο είναι της μορφής 0/0. Οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)+f(x)-2f(x+h)}{h^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DLH}}{=}}\lim_{h\to 0}\frac{2f'(x+2h)-2f'(x+h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+2h)-f'(x+h)}{h}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}-\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right)=2f''(x)-f''(x)=f''(x)$$

αφού $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}\right)=f''(x)$ και

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{h}\right)=2\lim_{h\to 0}\left(\frac{f'(x+2h)-f'(x)}{2h}\right)\overset{u=2h}{=}2\lim_{u\to 0}\left(\frac{f'(x+u)-f'(x)}{u}\right)=2f''(x)$$

Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=f'(x)+1\Rightarrow\left(f'(x)+1\right)'=f'(x)+1\Rightarrow f'(x)+1=c\cdot e^x$, $c\in\mathbb{R}$

Για $x=0$: $f'(0)+1=c\cdot e^0\Rightarrow c=1$, οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

$f'(x+)+1=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x-1\Rightarrow f(x)=e^x-x+\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$ και αφού $f(0)=0\Rightarrow\beta=-1$ προκύπτει

$f(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(\frac{1}{x}\right)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού λ. **(8 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)=e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1$, $A_g=\mathbb{R}^*$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $A_g=\mathbb{R}^*$ με $g'(x)=\frac{1}{x^2}\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right)$.

$g'(x)>0\Leftrightarrow 1-e^{\frac{1}{x}}>0\Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}}<1\Leftrightarrow\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow x<0$ και $g'(x)<0\Leftrightarrow x>0$, οπότε $g\nearrow(-\infty,0)$ και $g\searrow(0,+\infty)$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1\right)\overset{u=\frac{1}{x}\to 0}{=}\lim\limits_{u\to 0}\left(e^u-u-1\right)=0$,
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1\right)\overset{u=\frac{1}{x}\to 0}{=}\lim\limits_{u\to 0}\left(e^u-u-1\right)=0$
- $\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1\right)\overset{u=\frac{1}{x}\to +\infty}{=}\lim\limits_{u\to +\infty}\left(e^u-u-1\right)=\lim\limits_{u\to+\infty} e^u\cdot\left(1-\frac{u}{e^u}-\frac{1}{e^u}\right)=+\infty$

  αφού $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{1}{e^u}=0$ και $\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(e^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}-1\right)\overset{u=\frac{1}{x}\to -\infty}{=}\lim\limits_{u\to -\infty}\left(e^u-u-1\right)=+\infty$

Η g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$, άρα $g((-\infty,0))=(0,+\infty)$ και η g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$, άρα $g((0,+\infty))=(0,+\infty)$.

Άρα : Αν $\lambda\in(-\infty,0]$ η εξίσωση $f\left(\frac{1}{x}\right)=\lambda$ είναι ΑΔΥΝΑΤΗ αφού $f\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Αν $\lambda\in(0,+\infty)$ η εξίσωση $f\left(\frac{1}{x}\right)=\lambda$ έχει ακριβώς δύο λύσεις , αφού $\lambda\in g((-\infty,0))$ και $\lambda\in g((0,+\infty))$.

Δ3. Ένα σημείο $M(x, y)$, $x>0$, κινείται πάνω στην C_f ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό 1m/s. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον xx', η εφαπτομένη της C_f στο M τη στιγμή που η γωνία αυτή γίνεται ίση με 45° . **(8 μονάδες)**

ΛΥΣΗ

Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο Μ με τον άξονα $x'x$. Τότε ισχύει $\varepsilon\varphi\theta=f'(x)\Rightarrow\varepsilon\varphi\theta=e^x-1$, $\forall x>0$. Οπότε $\varepsilon\varphi\theta(t)=e^{x(t)}-1$, $\forall t\geq 0$. Οι συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες , άρα $\forall t\geq 0$:

$$(\varepsilon\varphi\theta(t))'=\left(e^{x(t)}-1\right)'\Rightarrow\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=e^{x(t)}\cdot x'(t)\Rightarrow\left(1+\varepsilon\varphi^2\theta(t)\right)\cdot\theta'(t)=e^{x(t)}\cdot x'(t)\quad \textbf{(1)}$$

Τη χρονική στιγμή $t=t_0$: $\varepsilon\varphi\theta(t_0)=1$, $x'(t_0)=1m/s$ και

$f'(x_0)=1\Leftrightarrow e^{x_0}-1=1\Rightarrow e^{x_0}=2\Rightarrow x_0=\ln 2$, οπότε **(1)** $:(1+1)\cdot\theta'(t_0)=e^{\ln 2}\cdot 1\Rightarrow\theta'(t_0)=1rad/s$.