

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **(8 μονάδες)**

A2. Τι ονομάζουμε σημείο καμπής μιας συνάρτησης; **(3 μονάδες)**

A3. Δίνεται η πρόταση: «Μια συνάρτηση 1-1 είναι και γνήσια μονότονη». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» **(1 μονάδα)** και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας **(3 μονάδες)**.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος».

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, ισχύει ότι $f(x) > 0$ για x κοντά στο x_0

β. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε x στο $[a, b]$ όπου f συνεχής συνάρτηση, ισχύει και $\int_a^b f(x) dx < 0$.

γ. Η εικόνα ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

δ. Αν μια παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ συνάρτηση εμφανίζει ακρότατο σε σημείο x_0 του διαστήματος Δ , τότε ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

ε. Η ευθεία $y = ax + b$ είναι ασύμπτωτη της $f(x)$ στο $(+\infty)$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax - b) = +\infty$ **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους: $f(x) = \ln(x-1)$, $x \in (1, +\infty)$ και $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$, $x > 0$.

B1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο διάστημα $(e+1, e^2+1)$. **(6 μονάδες)**

B2. Να βρείτε την συνάρτηση $\varphi(x) = (g \circ f)(x)$ **(4 μονάδες)** και στη συνέχεια την $\varphi^{-1}(x)$ **(4 μονάδες)**.

Έστω ότι $\varphi^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $\varphi^{-1}(x)$. **(4 μονάδες)**

B4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την $C_{\varphi^{-1}}$, τον $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=3$, $x=4$. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 + \eta\mu 2x}{x} = 3$ και $f'(x) \cdot f''(x) = x \cdot e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = -1$ και $f'(0) = 1$. **(4 μονάδες)**

ii. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της καμπύλης f στο σημείο της $(0, -1)$. **(1 μονάδα)**

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{e^{x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$. **(8 μονάδες)**

Γ3. Να βρείτε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής - αν υπάρχουν - της συνάρτησης $f(x)$. **(4 μονάδες)**

Γ4. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1}(x)$. **(2+6=8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \leq 0 \\ \ln x^x - x, & x > 0 \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και να εξετάσετε αν το θεώρημα Rolle μπορεί να εφαρμοστεί για τη συνάρτηση f στο διάστημα με άκρα τους αριθμούς $-\sqrt{3}$ και e . **(3+4=7 μονάδες)**

Δ2. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f . **(5 μονάδες)**

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $\pi - e < \pi(\ln \pi - 1)$ **(6 μονάδες)**

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f σε αυτό, να εφάπτεται και σε άλλο σημείο β , $\beta > 0$, στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f , χωρίς να έχει άλλα κοινά σημεία με την C_f . **(7 μονάδες)**