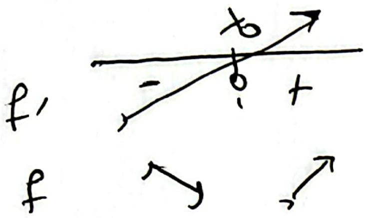
$\boxed{\Theta.\Delta}$

Δ1. $f'(x)=2x-e^{-x}$. f' συν. $[0,1]$ άρα με $f'(0)=-1$, $f'(1)=2-\frac{1}{e}$

και Θ.Β. $\exists\ x_0\in(0,1)$: $f'(x_0)=0$ και

$f''(x)=2+e^{-x}>0$ δηλ. $f'\nearrow$ συνεπώς:



η f έχει ελάχιστο στο x_0 το $f(x_0)$.

Επειδή $f'(x_0)=0 \Rightarrow 2x_0=e^{-x_0}$

άρα $f(x_0)=x_0^2+e^{-x_0}-3=x_0^2+2x_0-3=(x_0-1)(x_0+3)$

και αφού $x_0\in(0,1)$, είναι $f(x_0)<0$.

Δ2. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

αν $x\in(-\infty,x_0] \xRightarrow{f\searrow}$ άρα $f(x)\in[f(x_0),+\infty)$ και

$x\in[x_0,+\infty) \xRightarrow[f\nearrow]{}$ άρα $f(x)\in[f(x_0),+\infty)$

αφού $f(x_0)<0$, το $0\in A_1, A_2$ άρα, από ΘΕΤ,

$\exists\ x_1\in(-\infty,x_0)$ και $x_2\in(x_0,+\infty)$ ώστε $f(x_1)=f(x_2)=0$

Επίσης $f(-1)=e-2>0$ και $f(x_0)<0$ άρα $x_1\in(-1,x_0)$ συνεπώς

$|x_1|<1$ και $f(1)=\frac{1}{e}-2<0$ $f(2)=1+\frac{1}{e^2}>0$

άρα $x_2\in(1,2)$ δηλ. $|x_2|>1$

Δ3. $g(x)=f(x)\,e^{f(x_0)}-f(x_0)\,e^{f(x)}$. Είναι $g(x_0)=0$

και $g'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x_0)}-f'(x)\,f(x_0)\,e^{f(x)}$

$=f'(x)\left(e^{f(x_0)}-f(x_0)\cdot e^{f(x)}\right)$

αλλά $f(x_0)<0 \Rightarrow -f(x_0)\,e^{f(x)}>0$

δηλ. $g'(x)>0$

άρα $g\nearrow$ δηλ. το x_0 μοναδική

Δ4. Έστω $h(x) = g(2x) - g(e^{-x})$. Είναι $h(x) \geq 0$

δηλ. το 0 ελάχιστη τιμή της h που προκύπτει για $x = x_0$

αφού $2x_0 = e^{-x_0}$ συνεπώς (Θ.F) άρα $h'(x_0) = 0$

δηλ. $2g'(2x) + g'(e^{-x}) \cdot e^{-x} = h'(x) \Rightarrow$

για $x = x_0$ $\quad 2g'(2x_0) + g'(e^{-x_0})\, e^{-x_0} = 0 \Rightarrow$

$g'(2x_0)\,(2 + e^{-x_0}) = 0 \Rightarrow g'(2x_0) = 0$