

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x, & x \leq 0 \\ \ln x^x - x, & x > 0 \end{cases}$ Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

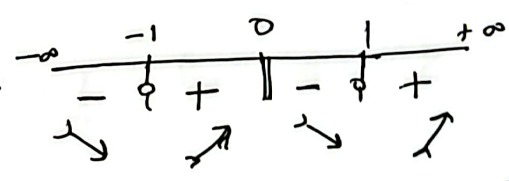
Συμμενός: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

δηλαδή f συνεχής στο 0 και επίσης συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως ηοδ/υή και συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ηράξεί συνεχών, άρα $f \in C, \mu\acute{\alpha}$ f συνεχής στο \mathbb{R} ,

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^3 + 3x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2 + 3) = 3$ ενώ

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - 1) = -\infty$ άρα η f δεν είναι

ηαρ/γν στο 0 άρα το θ -Rolle δεν γνορτί να εφαρμόζεται σε διάστημα που το ηφείρεται ως εσωτερικό σημείο.

Δ2. $f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3, & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$ 
 Εξήτ τον. ελαχ. για $x = -1$, $f(-1) = -2$ και $x = 1$, $f(1) = -1$
 και τον. γέγισω για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

Δ3. f συ. $[e, \pi]$, ηαρ/γν στο (e, π) άρα (ΘΜΤ) υπάρχει $\xi \in (e, \pi)$
 ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\pi) - f(e)}{\pi - e} = \frac{f(\pi)}{\pi - e}$. Επίσης για $x > 0$,

$f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ άμ f κερτί γτ $f'(x)$ γν. αύξουα.

Συμενός: $\xi > e \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(e) \Rightarrow \frac{f(\pi)}{\pi - e} > 1 \Rightarrow$

$f(\pi) > \pi - e$ άμ $\pi(\ln \pi - 1) > \pi - e$.

Δ4. Οι εφαπτες των f στα σημεία α, β έχουν αμοιβαία

Εξισώσεις: $y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$

$y = f'(\beta)x - \beta f'(\beta) + f(\beta)$ και πρέπει να συμπίπτουν:

δηλ. v.d.o το σύστημα $f'(\alpha) = f'(\beta)$ και $-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta f'(\beta) + f(\beta)$
με $\alpha \in (-1, -1/2)$, $\beta \in (0, +\infty)$ να έχει λύση. Πράγματι:

$$f'(\alpha) = f'(\beta) \Rightarrow -3\alpha^2 + 3 = \ln \beta \text{ και}$$

$$3\alpha^3 - 3\alpha - \alpha^3 + 3\alpha = -\beta \ln \beta + \beta \ln \beta - \beta \Rightarrow 2\alpha^3 = -\beta \Rightarrow \beta = -2\alpha^3$$

\Rightarrow Αρκεί v.d.o η εξίσωση $-3\alpha^2 + 3 = \ln(-2\alpha^3)$, $\alpha < 0$
να έχει ρ.β.

Πράγματι, θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = 3x^2 - 3 + \ln(-2x^3)$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, -1/2]$ και

$$h(-1) = \ln 2 > 0, \quad h(-1/2) = \frac{3}{4} - 3 + \ln \frac{1}{4} < 0 \text{ άρα (θ. Bolzano)}$$

υπάρχει $\alpha \in (-1, -1/2)$ ώστε $h(\alpha) = 0$ και τότε, αφού

$$\beta \in (-1, -1/2) \text{ και } \beta = -2\alpha^3 \text{ είναι } -1 < \alpha < -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$-1 < \alpha^3 < -\frac{1}{8} \Rightarrow 2 > -2\alpha^3 > \frac{1}{4} \text{ δηλ } \beta \in (\frac{1}{4}, 2).$$