ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=\begin{cases} -x^3+3x, & x\le 0 \\ \ln x^x - x, & x>0 \end{cases}$

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x =$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=\!=} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

συνεπώς: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

δηλαδή f συνεχής στο 0 και επίσης συνεχής στο $(-\infty, 0)$ ως πολ/μική και συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών, άρα τελικά f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^3+3x-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2+3) = 3$ ενώ

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x - x - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x - 1) = -\infty$ άρα η f δεν είναι παρ/μη στο 0 άρα το Θ. Rolle δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε διάστημα που το περιέχει ως εσωτερικό σημείο.

Δ2. $f'(x)=\begin{cases} -3x^2+3, & x<0 \\ \ln x, & x>0 \end{cases}$

	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
f		↘		↗		↘		↗	

Έχει τοπ. ελαχ. για $x=-1$, $f(-1)=-2$ και $x=1$, $f(1)=-1$ και τοπ. μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=0$.

Δ3. f συν. $[e,\pi]$, παρ/μη στο (e,π) άρα (ΘΜΤ) υπάρχει $\xi\in(e,\pi)$ ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\pi)-f(e)}{\pi-e} = \dfrac{f(\pi)}{\pi-e}$. Επίσης για $x>0$,

$f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ δηλ. f κυρτή με $f'(x)$ γν. αύξουσα.

Συνεπώς: $\xi > e \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(e) \Rightarrow \dfrac{f(\pi)}{\pi-e} > 1 \Rightarrow$

$f(\pi) > \pi - e$ δηλ. $\pi(\ln\pi - 1) > \pi - e$.

Δ4. Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία α, β έχουν αντίστοιχα εξισώσεις: $y = f'(\alpha)x - \alpha f'(\alpha) + f(\alpha)$

$y = f'(\beta)x - \beta f'(\beta) + f(\beta)$ και πρέπει να συμπίπτουν

δηλ. ν.δ.ο το σύστημα $f'(\alpha) = f'(\beta)$ και $-\alpha f'(\alpha) + f(\alpha) = -\beta f'(\beta) + f(\beta)$ με $\alpha \in (-1, -1/2)$, $\beta \in (0, +\infty)$ να έχει λύση. Πράγματι:

$$\left.\begin{aligned} &f'(\alpha) = f'(\beta) \Rightarrow -3\alpha^2 + 3 = \ln\beta \quad \text{και} \\ &3\alpha^3 - 3\alpha - \alpha^3 + 3\alpha = -\beta\ln\beta + \beta\ln\beta - \beta \Rightarrow 2\alpha^3 = -\beta \Rightarrow \beta = -2\alpha^3 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow$ Αρκεί ν.δ.ο η εξίσωση $-3\alpha^2 + 3 = \ln(-2\alpha^3)$, $\alpha < 0$ να έχει ρίζα.

Πράγματι, θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = 3x^2 - 3 + \ln(-2x^3)$

Η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[-1, -1/2]$ και

$h(-1) = \ln 2 > 0$, $h(-1/2) = \frac{3}{4} - 3 + \ln\frac{1}{4} < 0$ άρα (Θ. Bolzano)

υπάρχει $\alpha \in (-1, -1/2)$ ώστε $h(\alpha) = 0$ και τότε, αφού

$\alpha \in (-1, -1/2)$ και $\beta = -2\alpha^3$ είναι $-1 < \alpha < -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$-1 < \alpha^3 < -\frac{1}{8} \Rightarrow 2 > -2\alpha^3 > \frac{1}{4}$ δηλ. $\beta \in (1/4, 2)$.