ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ - ΓΕΠ2 - 2223

Α3. Ψευδής. Η $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ είναι 1-1 αλλά όχι γν. μονότονη.

Α4. Σωστό - Λάθος - Σωστό - Λάθος - Λάθος

Β1. Έστω $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x-1)-\frac{e^x-1+1}{e^x-1}=\ln(x-1)-1-\frac{1}{e^x-1}$

με $x>1$. Η $h(x)$ συνεχής (πρ. συνεχών) και είναι:

$$\left.\begin{aligned} h(e+1)&=1-1-\frac{1}{e^{e+1}-1}=-\frac{1}{e^{e+1}-1}<0\\ h(e^2+1)&=2-1-\frac{1}{e^{e^2+1}-1}=1-\frac{1}{e^{e^2+1}-1}>0\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\Theta B}\exists\, x_0\in(e+1,e^2+1) \text{ ώστε } h(x_0)=0.$$

Επίσης $h'(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{e^x}{(e^x-1)^2}>0\ \forall\, x>1$ άρα $\nearrow$, συνεπώς το μοναδικό.

Β2. $A_{g\circ f}=\{x\in A_f \text{ και } f(x)\in A_g\}=\{x>1 \text{ και } \ln(x-1)>0\}=$

$\{x>1 \text{ και } x>2\}=(2,+\infty)$ με $g(f(x))=g(\ln(x-1))=\frac{x-1}{x-2}$

Συνεπώς $\varphi(x)=\frac{x-1}{x-2}$, $x\in(2,+\infty)$. Είναι $\varphi'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}<0$

δηλ. $\varphi\searrow$, άρα φ 1-1.

Επίσης, αν $x\in(2,+\infty)\xRightarrow{\varphi\searrow}\varphi(x)\in(1,+\infty)=A_{\varphi^{-1}}$.

$y=\frac{x-1}{x-2}\Rightarrow yx-2y=x-1\Rightarrow x(y-1)=2y-1\Rightarrow x=\frac{2y-1}{y-1}$

δηλ. $\varphi^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

Β3. Επειδή $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1}=+\infty$, η $x=1$ είναι κατ/φη ασ/τη της φ^{-1}!

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-1}=2$ άρα η $y=2$ είναι οριζόντια ασ/τη της φ^{-1}!

Β4. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_3^4\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|dx$ και επειδή

$\frac{2x-1}{x-1}>0\ \forall\, x\in[3,4]$ έχουμε: $E=\int_3^4\frac{2x-2+1}{x-1}dx=$

$\int_3^4\left(2+\frac{1}{x-1}\right)dx=\left[2x+\ln(x-1)\right]_3^4=8+\ln 3-6-\ln 2\Rightarrow$

$E=2+\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{3e^2}{2}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $g(x)=\frac{f(x)+1+ημ2x}{x} \Rightarrow f(x)=xg(x)-ημ2x-1$, άρα

αφού f συνεχής, $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=0\cdot 3+0-1=-1$.

Επίσης, $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)+1+ημ2x}{x}-\frac{ημ2x}{x}\right]$

$=3-2=1$. Συνεπώς $f(0)=-1$ και $f'(0)=1$.

ii) Η εφ/νη της C_f στο $(0,-1)$ είναι η: $y+1=x \Rightarrow \boxed{y=x-1}$

Γ2. Είναι $f'(x)f''(x)=xe^{x^2} \Rightarrow 2f'(x)f''(x)=2xe^{x^2}$ άρα

$\left[(f'(x))^2\right]'=(e^{x^2})' \Rightarrow (f'(x))^2=e^{x^2}+c_1$ και για $x=0$, $c_1=0$

συνεπώς $|f'(x)|=\sqrt{e^{x^2}}\neq 0$ δηλ. η $f'(x)$ συνεχής, $f'(x)\neq 0$, άρα

η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο θετικό αφού $f'(0)=1$ συνεπώς

$f'(x)=\sqrt{e^{x^2}}$.

Γ3. Είναι $f''(x)=\frac{1}{2\sqrt{e^{x^2}}}\cdot 2x\cdot e^{x^2}=x\cdot\sqrt{e^{x^2}}$ και $f''(x)>0$ αν $x>0$

και $f''(x)<0$ αν $x<0$, συνεπώς

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\frown$		$\smile$	

η f έχει σημείο καμπής το $(0,f(0))=(0,-1)$.

Γ4. Επειδή $f'(x)=\sqrt{e^{x^2}}>0$, η f είναι γν. αύξουσα, άρα 1-1,

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f,

δηλ. $x\in(-\infty,+\infty) \Rightarrow f(x)\in\left(\lim_{x\to-\infty}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=\mathbb{R}$

γιατί: Για $x<0$, η $f(x)$ είναι κοίλη συνεπώς $f(x) \leq$ εφ/νη

δηλ. $f(x)<x-1$ και αφού $\lim_{x\to-\infty}(x-1)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

Επίσης, αν $x>0$, $f(x)>x-1$ άρα $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

αφού $\lim_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$.