ΘΕΜΑ Α'

Α3. Αληθής. Αν ήταν $f(x) \neq 0 \ \forall \ x \in [\alpha, \beta]$ τότε η f διατηρεί πρόσημο, συνεπώς $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0 \ \forall \ x \in [\alpha, \beta]$ άρα θα ήταν $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)dx < 0$ αντίστοιχα.

Α4. Λ - Λ - Σ - Λ - Σ

Β1. $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

μέγιστο για $x=1$, $f(1) = \frac{1}{e}$

$f''(x) = -e^{-x}(1-x) - e^{-x} = -e^{-x}(2-x)$

x		2	
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$		$\cup$

σ.κ. $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

Β2. $f'(2) = -\frac{1}{e^2}$ $\qquad y - f(2) = -\frac{1}{e^2}(x-2) \Rightarrow y - \frac{2}{e^2} = -\frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2}$

$y = -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2}$.

Για $x<2$: $f(x) < -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} \Rightarrow e^2 f(x) + x - 4 < 0$ (f κοίλη)

Ενώ για $x>2$: $f(x) > -\frac{1}{e^2}x + \frac{4}{e^2} \Rightarrow e^2 f(x) + x - 4 > 0$ (f κυρτή)

συνεπώς το όριο δεν υπάρχει.

Β3 $E(\alpha) = \int_0^\alpha |xe^{-x}| dx = \int_0^\alpha x(-e^{-x})' dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^\alpha + \int_0^\alpha e^{-x} dx$

$= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1 = -e^{-\alpha}(\alpha+1) + 1$

$\lim_{\alpha \to +\infty} -e^{-\alpha}(\alpha+1) = -\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\alpha+1}{e^\alpha} \overset{DLH}{=} -\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{e^\alpha} = 0$

Β4 Με ΘΜΤ στο $(\beta, \beta+1)$ και αφού f κυρτή στο $(\beta, \beta+1)$

Υπάρχει $\xi \in (\beta, \beta+1)$ ώστε: $f'(\xi) = f(\beta+1) - f(\beta)$.

Όμως $\beta < \xi < \beta+1 \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\beta) < f'(\xi) < f'(\beta+1)$

δηλ. $f(\beta+1) - f(\beta) < f'(\beta+1)$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u> $f(x) = \dfrac{\ln(x+1) - \ln x}{x^2} = \dfrac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x^2} = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

Γ1. Αφού $x > 0 \Rightarrow x+1 > 1$ και $1+\frac{1}{x} > 1$ άρα $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > 0$

και $x^2 > 0$ άρα $f(x) > 0$ και

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x+1} \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 2x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x^4} = -\frac{1 + 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)(x+1)}{x^3(x+1)}$$

άρα $f'(x) < 0$

Γ2. Η ανίσωση γράφεται $\dfrac{\ln\left(\frac{1+f(x)}{f(x)}\right)}{f^2(x)} > f(\ln 2) \Rightarrow$

$f(f(x)) > f(\ln 2) \xRightarrow{f \searrow} f(x) < \ln 2 \Rightarrow f(x) < f(1)$ άρα

$x > 1$ δηλ. $x \in (1, +\infty)$ αφού f γν. φθίνουσα

Γ3. Η εξίσωση γράφεται: $F(x^4+4) - F(x^4+2) = F(x^2+4) - F(x^2+2)$

Θεωρώ την $g(x) = F(x+2) - F(x)$ με $g'(x) = f(x+2) - f(x)$

και αφού $f \searrow$ $g'(x) < 0$ δηλ. $g \searrow$ συνεπώς 1−1.

Άρα η εξίσωση γίνεται: $G(x^4+2) = G(x^2+2) \Rightarrow$

$x^4 = x^2 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

Γ4. $$\int_{1/2}^{1} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx \;\overset{u = 1+1/x}{\underset{du = -\frac{1}{x^2}dx}{=}}\; \int_3^2 -\ln u\,du = \int_2^3 \ln u\,du =$$

$$\left[u\ln u - u\right]_2^3 = 3\ln 3 - 3 - 2\ln 2 + 2 = \ln 27 - \ln 4 + 1.$$