

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠ7 -2223

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του διαστήματος Δ , τότε η f είναι γνήσια αύξουσα στο διάστημα Δ . (7 μονάδες)

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του. (4 μονάδες)

A3. Δίνεται η πρόταση: «Έστω μια συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ για το οποίο ισχύει ότι $f''(x_0) = 0$. Τότε το x_0 είναι σημείο καμπής για τη συνάρτηση f ». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως «Αληθή» ή «Ψευδή» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (1+3 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Μια συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β. Μια συνάρτηση γνήσια μονότονη σε ένα διάστημα Δ , είναι αντιστρέψιμη.

γ. Μια συνεχής και μη σταθερή συνάρτηση σε ένα ανοικτό διάστημα Δ , έχει σύνολο τιμών επίσης ένα ανοικτό διάστημα $f(\Delta)$.

δ. Αν f και g δύο συναρτήσεις συνεχείς στο x_0 , τότε και η $(f \circ g)$ είναι συνεχής στο x_0 .

ε. Η εφαπτομένη μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης σε σημείο καμπής της, «διαπερνά» την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$, $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

B1. Να βρείτε τη μονοτονία και την κυρτότητα της συνάρτησης f καθώς και τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της, αν υπάρχουν. (12 μονάδες)

B2. Να βρείτε- αν υπάρχουν - ασύμπτωτες για τη συνάρτηση f και να κατασκευάσετε μια πρόχειρη γραφική της παράσταση. (3+5=8 μονάδες)

B3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = a$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού a . (5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$f(x)(f(x) - 4) = 5 - x^2, \text{ για κάθε } x \in \Delta. \quad (1)$$

Γ1. Να δείξετε ότι η f δεν έχει σημείο καμπής. (6 μονάδες)

Έστω ότι η f είναι ορισμένη και συνεχής στο $[-3, 3]$ και ισχύει για αυτήν ότι $f(0) = 5$ καθώς και η σχέση (1).

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 + \sqrt{9 - x^2}$, $x \in [-3, 3]$. (6 μονάδες)

Γ3. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης f . (6 μονάδες)

Γ4. Να βρείτε την εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο της $(\sqrt{5}, f(\sqrt{5}))$ και να βρείτε - αν υπάρχει - το όριο: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{e^{-2023}}{2f(x) + \sqrt{5} \cdot x - 13}$ (2+5=7 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) + f(x) - 2f(x+h)}{h^2} = f'(x) + 1 \text{ για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι έχει}$$

ελάχιστο στο $x=0$ την τιμή 0.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ (9 μονάδες)

Δ2. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f\left(\frac{1}{x}\right) = \lambda$, για τις διάφορες

τιμές του πραγματικού λ . (8 μονάδες)

Δ3. Ένα σημείο $M(x, y)$, $x > 0$, κινείται πάνω στην C_f ώστε η τετμημένη του να μεταβάλλεται με ρυθμό 1m/s. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας που σχηματίζει με τον OX' , η εφαπτομένη της C_f στο M τη στιγμή που η γωνία αυτή γίνεται ίση με 45° . (8 μονάδες)