ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

1. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου :
$P(x)=\left(a^3-4a\right)x^3-\left(a^2-2a\right)x^2+\left(a^2-3a+2\right)x-a+2,\ a\in\mathbb{R},$ *για τις διάφορες τιμές του α.*

2. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) πρώτου βαθμού τέτοιο ώστε P(P(x))=4x+9. (Απ: P(x)=2x+3 ή -2x-9)

3. Να βρείτε πρωτοβάθμιο πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε : $P^2(2x)=P(4x^2)+4x$ (Απ: P(x)=x+1)

4. Αν το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x), να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(3x-4)+P^2(4-x)$ έχει παράγοντα το (x-2).

5. Να βρείτε πολυώνυμο P(x) τέτοιο ώστε: $P^2(x)+P(x)=x^2-3x+2$ (Απ: P(x)=x-2 ή -x+1)

6. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, b σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i. Το $P(x)=ax^3-3x^2+(a-b)x-6a$ *να έχει παράγοντα το* (x^2+2) $(Απ: a=1, b=-1)$
ii. Το $Q(x)=2x^3+x^2-ax+b$ *διαιρούμενο με* (x^2-2) *να αφήνει υπόλοιπο το* $υ(x)=9x+4$
$(Απ:\ a=-5, b=2)$
iii. Το $P(x)=x^4-x^3+x^2+ax-1$ *να έχει παράγοντα το* (x^3+x+b) $(Απ:\ a=0, b=1)$

7. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, b σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
i. Το $P(x)=ax^3-3x^2-ax-3b$ *να έχει παράγοντα το* (x^2-1) $(Απ: a\in\mathbb{R}, b=-1)$
ii. Το $Q(x)=x^3+(a+b)x^2-3ax-9+b$ *να έχει παράγοντα το* (x^2-x-2)
$(Απ:\ a=2, b=1)$
iii. Το $P(x)=x^3+3ax^2+(b-2)x+4$ *να έχει παράγοντα το* $(x-2)^2$ $(Απ:\ a=-1, b=2)$

8. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:
i. $x^3-3x^2+4>0$ $(x\in(-1,2)\cup(2,+\infty))$ *ii.* $x^3-7x+6\le 0$ $(x\in(-\infty,-3]\cup[1,2])$
iii. $x^4+2x^3-3x^2-8x-4<0$ $(x\in(-2,-1)\cup(-1,2))$
iv. $x^4+3x^3-4x\le 0$ $(x\in[0,1]\cup\{-2\})$
v. $x^4-2x^3-3x^2+4x+4>0$ $(x\in\mathbb{R}-\{-1,2\})$

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
i. $x^6-x^4-8x^2-4=0$ $\left(x=\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{17}}{2}}\right)$
ii. $x^4+3x^3-2x^2+3x+1=0$ $\left(x=-2\pm\sqrt{3}\right)$
iii. $\left(x^2-2x\right)^2-(x-1)^2-5=0$ $(x=-1, x=3)$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:
i. $2+\sqrt{3x+1}=\sqrt{7x+1}$ ***ii.*** $\sqrt{22-2x}=2+\sqrt{10-x}$ ***iii.*** $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=5$
iv. $2x^2=\sqrt{2x^2-5x+1}+5x+1$ ***v.*** $\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}=\frac{5}{2}$

11. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου P(x) (με βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2) με το (x-2) αφήνει υπόλοιπο -7 , ενώ η διαίρεση με το (x+3) αφήνει υπόλοιπο 3. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του ίδιου πολυωνύμου με το $Q(x) = x^2 + x - 6$. $(A\pi : \upsilon(x) = -2x - 3)$

12. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 2x - 1$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση P(x):(x^2+1) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \le 5x - 7$

13. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 6x^2 + 3x + 6$.

α. Να κάνετε τη διαίρεση P(x):(x^2-2) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \le 3x - 2$

14. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$i.\ \dfrac{2x-3}{x^2-2x-3} \le 1 \qquad (x \in (-\infty,-1) \cup [0,3) \cup [4,+\infty))$

$ii.\ \dfrac{3x-4}{x+2} \ge \dfrac{x+4}{x-2} \qquad (x \in (-\infty,-2) \cup [0,2) \cup [8,+\infty))$

$iii.\ 1 \le \dfrac{2x}{x^2+x-2} \qquad (x \in (-2,-1] \cup (1,2])$

15. Έστω το πολυώνυμο P(x) το οποίο είναι τρίτου βαθμού, διαιρούμενο με (x+1) αφήνει υπόλοιπο -4 και διαιρούμενο με (x-2) αφήνει υπόλοιπο -16.

α. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x^2-x-2. (Απ: υ(x)=-4x-8)

β. Να βρείτε το πολυώνυμο αν γνωρίζετε ότι ο σταθερός όρος του είναι ο -12, ενώ το άθροισμα των υπόλοιπων συντελεστών του είναι -6.

γ. Αν $P(x) = x^3 + x^2 - 8x - 12$, τότε:

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x)=0.

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \ge 6(x+2)$

16. Δίνεται το πολυώνυμο με τύπο $P(x) = \left(a^2 - 2a\right)x^4 + \dfrac{2-a}{2}x^3 + bx^2 + cx - 6,\ a \in \mathbb{R}$.

Το πολυώνυμο είναι τρίτου βαθμού και έχει παράγοντα το $Q(x) = x^2 - 3x + 2$.

α. Να αποδείξετε ότι a=0, b=-6 και c=11.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{P(x)} = |-x^2 + 3x - 2|$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{P(x)}{x^2+x-6} \le x - 1 \quad (x \in (-\infty,-3) \cup [1,2) \cup (2,+\infty))$

17. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$.

α. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης του P(x) με το (x^2-4). Αν είναι π(χ) το πηλίκο και υ(χ) το υπόλοιπο της διαίρεσης τότε:

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{\pi(\chi)} + \chi = \upsilon(\chi) - 1$ (Απ: χ=1)

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται πάνω από την ευθεία με εξίσωση $y = 11x - 8$. $(A\pi : x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right) \cup (2,+\infty))$.

18. Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού που να έχει παράγοντες τα πολυώνυμα: x^2+3x+2, x^2+5x+6, x^2+4x+3. Είναι μοναδικό αυτό το πολυώνυμο; Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η διαίρεσή του με (x-1) είναι 48, να βρείτε αυτό το πολυώνυμο.

19. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=(a^2-3a)x^3+(a^2-9)x^2+(a-3)x+a^2,\ \ a\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το α ώστε το P(x) να είναι δευτέρου βαθμού.

b. Για την τιμή του α που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να βρείτε ένα πολυώνυμο Q(x) ώστε το P(x) να είναι το πηλίκο της διαίρεσής του με το (α+2-x) και το Q(x) να αφήνει το ίδιο υπόλοιπο σε αυτή τη διαίρεση με το υπόλοιπο που αφήνει το P(x) κατά τη διαίρεσή του με (x+1).