A. Το κέντρο είναι το μέσο του ΒΓ, δηλαδή $K(3,0)$ και $R = KB = 2$

συνεπώς $C: (x-3)^2+y^2=4$.

A1. Έστω $M(x,y)$ σημείο της εφ/νης. Ζητώ $\vec{KA}\cdot\vec{AM}=0 \Rightarrow (1,-\sqrt{3})\cdot(x-4,\ y+\sqrt{3})=0$

$\Rightarrow x-4-\sqrt{3}y-3=0 \Rightarrow x-\sqrt{3}y-7=0$.

A2. Έστω (ε) η ευθεία με εξίσωση: $y+5=\lambda(x-1) \Rightarrow \lambda x-y-\lambda-5=0$

Ζητώ $d(K,(\varepsilon))=R \Rightarrow \dfrac{|3\lambda-\lambda-5|}{\sqrt{\lambda^2+1}}=2 \Rightarrow |2\lambda-5|=2\sqrt{\lambda^2+1} \Rightarrow$

$4\lambda^2-20\lambda+25=4\lambda^2+4 \Rightarrow -20\lambda=-21 \Rightarrow \lambda=21/20$ άρα η (ε) είναι

η $\dfrac{21}{20}x-y-\dfrac{21}{20}-5=0 \Rightarrow 21x-20y-121=0$ και η άλλη είναι

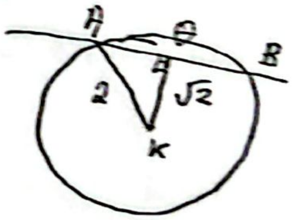
η κατακόρυφη, $x=1$.

A3. Ζητώ $d(K,(\varepsilon))=R \Rightarrow \dfrac{|3-0+\alpha|}{\sqrt{2}}=2 \Rightarrow |\alpha+3|=2\sqrt{2} \Rightarrow \alpha=2\sqrt{2}-3$

ή $\alpha=-2\sqrt{2}-3$.

A4. Η απόσταση του $K(3,0)$ από την $x-y-1=0$ είναι: $\dfrac{|3-0-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}<R$

άρα η ευθεία τέμνει τον κύκλο σε 2 σημεία.



A5. $A\Theta^2=2^2-\sqrt{2}^2 \Rightarrow A\Theta=\sqrt{2}$ άρα $AB=2\sqrt{2}$.

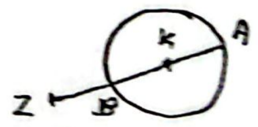
A6. Πρέπει $\Lambda K=R+\rho \Rightarrow 5=2+\rho \Rightarrow \rho=3$

άρα $x^2+(y-4)^2=9$

A7. Η απόσταση $KZ=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}>R$ άρα το Z εξωτερικό του C

συνεπώς $\max ZK=ZK+2=3\sqrt{2}+2$ και

$\min ZK=3\sqrt{2}-2$.



A8. Επειδή $d(K,(\varepsilon))=\dfrac{|3+0+3|}{\sqrt{2}}=\dfrac{6}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}>R=2$ η (ε) δεν τέμνει τον C.

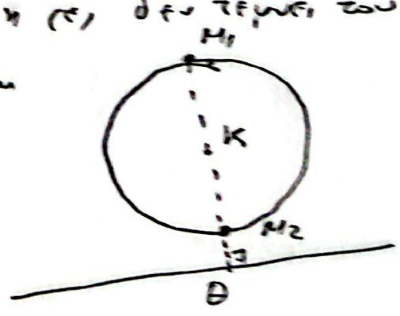
Η μεγαλύτερη απόσταση του M από την (ε) είναι

όταν το M βρεθεί στη θέση M_1, οπότε

$\max M\Theta=K\Theta+\rho=3\sqrt{3}+2$ και η μικρότερη

αν το M βρεθεί στη θέση M_2 δηλ

$M_2\Theta=K\Theta-\rho=3\sqrt{3}-2$.



B $x^2+y^2-2(k-1)x+2ky+k^2=0 \Rightarrow (x-k+1)^2+(y+k)^2=(k-1)^2$

B1. Πρέπει $(k-1)^2>0 \Rightarrow k\neq 1$.

B2. $K(k-1,-k)$, $R=|k-1|$

B3. Αφού $|x_0|=|k-1|=R$, οι κύκλοι εφάπτονται στον $y'y$.

B4. $x=k-1$, $y=-k \Rightarrow x+y=-1$, Ευτός του σημείου $(0,-1)$.

B5. $x^2+y^2+8x-6y+9=0 \Rightarrow (x+4)^2+(y-3)^2=16$. Η γραμμή είναι της οικογένειας αν $-k+1=4$, $k=-3$ και $(k-1)^2=16$ που αληθεύουν όλες για $k=-3$.

B6. Πρέπει $d(K,(\varepsilon))=R \Rightarrow \frac{|k-1-k-1|}{\sqrt{2}}=|k-1| \Rightarrow \sqrt{2}=|k-1| \Rightarrow$
$k=1-\sqrt{2}$ ή $k=1+\sqrt{2}$ δηλ. υπάρχουν δύο τέτοιοι κύκλοι.

B7. $|k-1|=4 \Rightarrow k=5$ ή $k=-3$

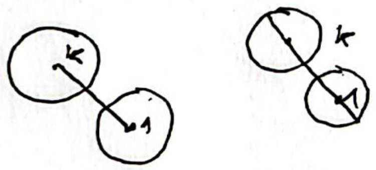
Για $k=5$: $(x-4)^2+(y+5)^2=4^2 \Rightarrow (x-4)^2+(y+5)^2=16$ $K_1(4,-5)$

Για $k=-3$: $(x+4)^2+(y-3)^2=16$ $K_2(-4,3)$

Επειδή $K_1K_2=\sqrt{128}=8\sqrt{2}>R_1+R_2=8$ άρα είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου

B8. Για $k=2$, ο $C:(x-1)^2+(y+2)^2=1$, $\Lambda(1,-2)$ $R_1=1$.

Επειδή $K\Lambda=\sqrt{5}>R_1+R_2=2$ οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου. Συνεπώς $\max AB=K\Lambda+\rho_1+\rho_2$
$\Rightarrow \max AB=(\sqrt{5}+2)$ ενώ $\min AB=(\sqrt{5}-2)$.



B9. Ο κύκλος C μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$x^2+y^2-2kx+2x+2ky+k^2=0 \Rightarrow k^2+k(2y-2x)+x^2+y^2+2x=0$$

Η τελευταία εξίσωση, αν θεωρηθεί πολυώνυμο του k, δεν μπορεί να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, άρα δεν υπάρχει τέτοιο σταθερό σημείο.

Γ6 $\frac{MA}{MB}=2 \Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+(y-3)^2}}{\sqrt{x^2+(y+3)^2}}=2 \Rightarrow x^2+(y-3)^2=4x^2+4(y+3)^2 \Rightarrow$

$3x^2+3y^2+30y+27=0 \Rightarrow x^2+y^2+10y+9=0 \Rightarrow$

$x^2+(y+5)^2=16$, $K(0,-5)$, $R=4$.

Γ1. $M(2+\eta\mu\varphi,\ 1-\sigma\upsilon\nu\varphi)$. Έστω $x=2+\eta\mu\varphi \Rightarrow \eta\mu\varphi = x-2$

και $y=1-\sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\varphi = 1-y$ και συνεπώς $(x-2)^2+(1-y)^2=1$

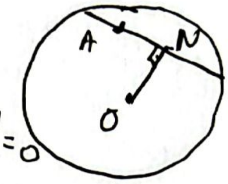
$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=1$, δηλ. κύκλος $K(2,1)$ και $R=1$.

$N\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}, \frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda+1}\right)$. Έστω $x=\frac{\lambda-1}{\lambda+1} \Rightarrow x^2=\frac{(\lambda-1)^2}{(\lambda+1)^2}$

και $y=\frac{2\sqrt{\lambda}}{\lambda+1} \Rightarrow y^2=\frac{4\lambda}{(\lambda+1)^2} \Rightarrow x^2+y^2=\frac{\lambda^2-2\lambda+1+4\lambda}{(\lambda+1)^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2=\frac{(\lambda+1)^2}{(\lambda+1)^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$

Γ2. Έστω $N(x,y)$ σημείο του γ. τόπου.

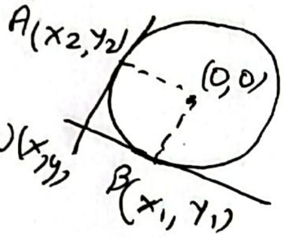


$ON \perp NA \Rightarrow \vec{ON}\cdot\vec{NA}=0 \Rightarrow (x,y)\cdot(-1-x,\ 2-y)=0$

$\Rightarrow -x-x^2+2y-y^2=0 \Rightarrow x^2+y^2+x-2y=0$

$\Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}$ δηλ. κύκλος $K(-\frac{1}{2}, 1)$, $R=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Γ3. Το OANB είναι τετράγωνο



συνεπώς $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$

$\Rightarrow xx_1+yy_1=\rho^2=9$

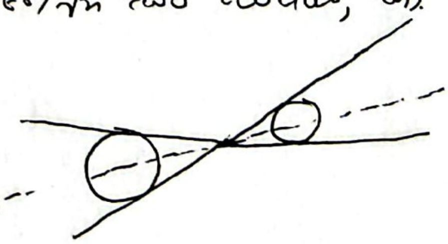
$xx_2+yy_2=9$ και $\vec{OB}\cdot\vec{BN}=\vec{BN}\cdot\vec{NA}=0$

$\Rightarrow (x-x_1, y-y_1)(x_2-x, y_2-y)=0 \Rightarrow xx_2-x^2-x_1x_2+xx_1+yy_2-y^2-y_1y_2+yy_1=0$

$\Rightarrow x^2+y^2=18$.

Γ4. Οι ευθείες είναι παρ/λες, συνεπώς είναι εφ/νες στα άκρα διαμέτρων των κύκλων, άρα ο γ. τόπος είναι η μεσ/λη των ευθειών, δηλ. η $y=\sqrt{3}x+1$

Γ5. Τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι δύο ευθείες.



Αν $M(x,y)$ ένα τέτοιο σημείο, πρέπει $d(M,(\varepsilon_1))=d(M,(\varepsilon_2)) \Rightarrow$

$\frac{|\sqrt{3}x-y-1|}{2}=\frac{|-\sqrt{3}x-y+3|}{2} \Rightarrow$ $2\sqrt{3}x=4 \Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ή $-y-1=y-3 \Rightarrow y=1$