

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. **(8 μονάδες)**

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κλειστό διάστημα $[a, b]$? **(3 μονάδες)**

A3. Δίνεται η πρόταση: «Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε σημείο a του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο a ». Να χαρακτηρίσετε την πρόταση ως αληθή ή ψευδή και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. **(1+3=4 μονάδες)**

A4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Η γραφική της παράσταση είναι ημικύκλιο β. Έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή γ. Είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[-1, 1]$ δ. Έχει οριζόντια εφαπτομένη σε ένα ακριβώς σημείο της. ε. Είναι περιττή.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι για μια συνάρτηση f συνεχή στο \mathbb{R} και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$, γνωρίζουμε ότι η ευθεία με τύπο $y=-3x+4$ είναι η εφαπτομένη της στο $x_0=2$.

B1. Να αποδείξετε ότι: $f'(2) = -3$ και $f(2) = -2$. **(6 μονάδες)**

B2. Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1)+2x}{x^2-1}$ ii. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+3)-f(1-x)}{x+1}$ **(10 μονάδες)**

B3. Αν η συνάρτηση g με τύπο: $g(x) = f(x^2+1) + (x+2)^{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο $a=1$. **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \frac{2}{x}$, $x \in (0, +\infty)$ και $g(x) = -x^2 + ax$, $a, x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της συνάρτησης f στο $x_0=1$ και στη συνέχεια να βρείτε - αν υπάρχει - εφαπτομένη της ίδιας συνάρτησης που να είναι κάθετη στην (ϵ). **(2+3=5 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε η (ϵ) να εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Είναι δυνατόν η επαφή να πραγματοποιείται σε κοινό σημείο των C_f , C_g ; **(9+3=12 μονάδες)**

Έστω ότι $g(x) = -x^2 - 6x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ρ , $\rho < 0$, ώστε η εφαπτόμενη της C_g στο $(\rho, g(\rho))$, να είναι παράλληλη της ευθείας με εξίσωση: $y = (e^\rho - \rho)x$. **(8 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = a \ln x + 2$, $x \in (1, +\infty)$, $a < 0$ καθώς και η ευθεία (ϵ) με εξίσωση: $y = -2x + 1$.

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 , $x_0 \in (1, +\infty)$, ώστε η (ϵ) να εφάπτεται της C_f στο $(x_0, f(x_0))$. **(10 μονάδες)**

Δ2. Να δείξετε ότι το x_0 είναι μοναδικό. **(8 μονάδες)**

Δ3. Με δεδομένο ότι η (ϵ) είναι η εφαπτόμενη στο $(x_0, f(x_0))$, να δείξετε ότι:

$\ln(-a) = 1 + \ln 2 - \frac{1}{a}$, $a < -2$ **(7 μονάδες)**