Απαντήσεις ΕΠ3 - 2223

A3: Λ - Σ - Σ - Λ - Λ

ΘΕΜΑ Β

Ισχύει ότι $f(0)=3$ και $f(1)=\ln 2$.

B1. Αφού f γν. μονότονη με $0<1 \Rightarrow f(0)=3>\ln 2=f(1)$ η f είναι γνήσια φθίνουσα.

B2. Εφόσον f γν. φθίνουσα η ανίσωση $f(\alpha\ln\alpha)\le f(\ln\alpha)$ γίνεται $\alpha\ln\alpha \ge \ln\alpha \iff \ln\alpha\cdot(\alpha-1)\ge 0$. Η σχέση ισχύει, γιατί αν $\alpha<1 \Rightarrow \ln\alpha<0$ και $\alpha-1<0$, συνεπώς $(\alpha-1)\ln\alpha>0$ ενώ αν $\alpha\ge 1 \Rightarrow \ln\alpha\ge 0$ και $\alpha-1\ge 0$, συνεπώς $(\alpha-1)\ln\alpha\ge 0$.

B3. $f(e^{x-1}+\ln x)=\ln 2=f(1) \Rightarrow e^{x-1}+\ln x=1$.
Έστω $g(x)=e^{x-1}+\ln x-1$, $x\in(0,+\infty)$. Είναι $g(1)=0$ και $g\nearrow$ $(x_1<x_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow g(x_1)<g(x_2))$, συνεπώς η $x=1$ μοναδική.

B4. Επειδή $g(1)=f(1)+3-\ln 2-3=0$ και $g(0)=3-3=0$, η $g(x)$ δεν είναι 1-1.

ΘΕΜΑ Γ.

Είναι $f^2(x)-2f(x)=3-x^2 \Rightarrow f^2(x)-2f(x)+1=4-x^2 \Rightarrow$
$(f(x)-1)^2=4-x^2 \Rightarrow |f(x)-1|=\sqrt{4-x^2}$. (1)

Γ1. Αν $g(x)=f(x)-1$, ισχύει ότι $g(-2)=g(2)=0$, συνεπώς $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(-2,2)$ και $g(x)$ συνεχής άρα η $g(x)$ διατηρεί πρόσημο με $g(0)=2$ δηλ. $g(x)>0$.

Γ2. Αφού $g(x)>0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f(x)-1=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f(x)=1+\sqrt{4-x^2}$.
Είναι $x^2\ge 0 \Rightarrow -x^2\le 0 \Rightarrow 4-x^2\le 4 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}\le 2 \Rightarrow f(x)\le 3$ και $\sqrt{4-x^2}\ge 0 \Rightarrow f(x)\ge 1$ δηλ. $f(x)\in[1,3]$ δηλ. η f έχει ελάχιστο για $x=\pm 2$ και μέγιστο για $x=0$.

Γ3. Η $f(x)=\text{συν}x$ ~~έχει μοναδική λύση~~ είναι αδύνατη ~~x=0~~ γιατί $\text{συν}x\le 1$ ενώ $f(x)\ge 1$ και το 1 προκύπτει για $x=\pm 2$ για την $f(x)$ ενώ για $x=0$ για το συνx.

$\boxed{\Theta\Delta}$

Αφού f συνεχής στο $x_0=2$, $f(2)=\lim\limits_{x\to 2}\left[\frac{ημ(x-2)}{x-2}+x-1\right]=2$

άρα $f(2)=e^{α-3}+1=2 \Rightarrow e^{α-3}=1 \Rightarrow α=3$

και $f(x)=\begin{cases} 2, & για\ x=2 \\ \frac{ημ(x-2)}{x-2}+x-1, & x\neq 2 \end{cases}$

Δ2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ άρα το ΟΕ συν. τιμών, δηλ.

υπάρχει $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_0)=0$

Δ3. $f(x+2)=\frac{ημx}{x}+(x+2)^2-1=\frac{ημx}{x}+x^2+4x+3$ συνεπώς:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{ημx}{x}+x^2+4x+3}{x+συνx}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(\frac{ημx}{x^2}+x+4+\frac{3}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{συνx}{x}\right)}=+\infty$$

γιατί $\left|\frac{ημx}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2} \Rightarrow -\frac{1}{x^2}\le\frac{ημx}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$