ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ ΓΙΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΒΑΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Εκτός από τις κλασσικές , θυμηθείτε κυρίως τις δύο παρακάτω :

$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ $\quad$ $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$, αλλά και την γενικότητα:

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=(\alpha-\beta)(\alpha^{\nu-1}+\alpha^{\nu-2}\beta+\alpha^{\nu-3}\beta^2+...+\alpha\beta^{\nu-2}+\beta^{\nu-1}),\quad \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \nu\in\mathbb{N}.$$

2. ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ (ορισμοί – σχέσεις – συμπεράσματα)

i. Ισχύουν: $|\alpha|=\begin{cases}-\alpha, & \text{αν } \alpha<0\\ \alpha, & \text{αν } \alpha\ge 0\end{cases}$, $|\alpha|^2=\alpha^2$, $-|\alpha|\le\alpha\le|\alpha|$.

ii. Επίσης: $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$, $\dfrac{|\alpha|}{|\beta|}=\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|$, αλλά $||\alpha|-|\beta||\le|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

Στην τελευταία σχέση, τα ίσον ισχύουν αν οι α,β είναι ετερόσημοι ή ομόσημοι.

iii. Ακόμα, αλλάζουμε πρόσημα (όλα!) όποτε θέλουμε: $|\alpha|=|-\alpha|$, $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$

iv. Προσοχή!!!!! $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|$ για κάθε ν άρτιο φυσικό.

v. $|x|+|y|=0\Rightarrow x=0$ και $y=0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν:
$|x|+|y|\le 0$ ή $x^{2\nu}+y^{2\nu}=0$, δηλαδή $x=y=0$.

vi. $|f(x)|\le\alpha\Leftrightarrow-\alpha\le f(x)\le\alpha$, όπου $\alpha>0$.

vii. $|f(x)|\ge\theta\Leftrightarrow f(x)\ge\theta$ ή $f(x)\le-\theta$.

3. ΡΙΖΕΣ

Προσοχή στην περίπτωση όπου έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}$. Αν το **κ είναι περιττός**, τότε το α είναι απαραίτητα μη αρνητικός και μπορούμε να το γράψουμε στη μορφή : $\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\alpha^{\frac{\kappa}{\nu}},\ \nu\in\mathbb{N}^*$.

Αν το κ είναι άρτιος, τότε δεν πρέπει απαραίτητα το α να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός, οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις, προκειμένου να βγάλουμε τη ρίζα από το συμβολισμό:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}=\begin{cases}(-\alpha)^{\frac{\kappa}{\nu}}, & \text{αν } \alpha\le 0\\ \alpha^{\frac{\kappa}{\nu}}, & \text{αν } \alpha\ge 0\end{cases}$$

Γενικά, μπορείτε να χρησιμοποιείτε τις γνωστές ιδιότητες , αλλά και τις δύο πιο περίεργες:

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\kappa]{\alpha}}=\sqrt[\nu\kappa]{\alpha}\quad\text{και}\quad\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\kappa\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\kappa}\quad\text{ενώ}\quad\alpha\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\cdot\beta}\quad\text{για κάθε } \alpha,\beta\ge 0,\ \nu,\kappa\in\mathbb{N}^*.$$

4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

	30^o	45^o	60^o
ημ	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συν	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

	0^o	90^o	180^o	270^0
ημ	0	1	0	-1
συν	1	0	-1	0
εφ	0	-	0	-
σφ	-	0	-	0

i. Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες:

$$ημ^2χ+συν^2χ=1,\ \ εφχ=\frac{ημχ}{συνχ},\ \ σφχ=\frac{συνχ}{ημχ},\ \ εφχ\cdot σφχ=1,\ 1+εφ^2χ=\frac{1}{συν^2χ},\ 1+σφ^2χ=\frac{1}{ημ^2χ}$$

ii. Τύποι αθροίσματος – διαφοράς (ποτέ δεν ξέρεις) και αποτετραγωνισμού – διπλάσιου τόξου (που πρέπει οπωσδήποτε να ξέρεις!)

$$ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα \qquad ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα$$
$$συν(α+β)=συνασυνβ-ημαημβ \qquad συν(α-β)=συνασυνβ+ημαημβ$$
$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ} \qquad εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ}$$

$$ημ2α=2ημασυνα,\quad συν2α=συν^2α-ημ^2α=2συν^2α-1=1-2ημ^2α,\quad εφ2α=\frac{2εφα}{1-εφ^2α}$$

$$ημ^2χ=\frac{1-συν2χ}{2}\quad ,\quad συν^2χ=\frac{1+συν2χ}{2}\ .$$

iii. Λύσεις τριγωνομετρικών εξισώσεων:

$$ημχ=ημα \Rightarrow χ=2κπ+α\ \ ή\ \ χ=2κπ+π-α$$
$$συνχ=συνα \Rightarrow χ=2κπ\pm α$$
$$εφχ=εφα\ \ ή\ \ σφχ=σφα \Rightarrow χ=κπ+α,\ \ όπου\ \ κ\in\mathbb{Z}.$$

$$\text{Προσοχή στις } 2 \text{ περιπτώσεις}:\ ημχ=0 \Leftrightarrow χ=κπ,\quad συνχ=0 \Leftrightarrow χ=κπ+\frac{π}{2}$$

iv. Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο

Όταν έχεις π/2 ή 3π/2, αλλάζεις τριγωνομετρικό, αν έχεις π ή 2π, τον αφήνεις ίδιο. Για το πρόσημο, κρίνεις από το τεταρτημόριο στο οποίο βρίσκεσαι. Παραθέτω μερικούς τύπους , όχι για παπαγαλία, αλλά για να μάθετε τον τρόπο κοιτώντας το 1^o μέλος, να μπορείτε να «βγάλετε» το 2^o και όχι να το θυμηθείτε.

$$ημ(π-χ)=ημχ,\ συν(π-χ)=-συνχ,\ εφ(π+χ)=εφχ,\ σφ(π-χ)=-σφχ$$
$$συν(π+χ)=-συνχ,\ ημ(-χ)=-ημχ,\ εφ(-χ)=-εφχ,\ σφ(-χ)=-σφχ,\ αλλά\ \ συν(-χ)=συνχ$$

$$ημ(\frac{π}{2}-χ)=συνχ,\ συν(π/2-χ)=ημχ,\ εφ(π/2+χ)=-σφχ,\ σφ(π/2-χ)=εφχ$$
$$συν(3π/2+χ)=ημχ,\ ημ(\frac{3π}{2}-χ)=-συνχ,\ εφ(\frac{3π}{2}-χ)=-σφχ,\ σφ(\frac{3π}{2}+χ)=-εφχ$$

5. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ – ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ

i. $f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1,\quad f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, f γνήσια αύξουσα αν $a>1$, γνήσια φθίνουσα αν $0<a<1$.

ii. $f(x)=\ln x,\ f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, f γνήσια αύξουσα, $\ln 1=0$, $\ln e=1$, $\ln e^{\text{κάτι}}=e^{\ln(\text{κάτι})}=\text{κάτι}$
$\ln x+\ln y=\ln(xy)$, $\ln x-\ln y=\ln(x/y)$, $\ln x^k=k\ln x$.

ΣΤ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

i. Δευτεροβάθμιες εξισώσεις

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0\to\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, για $\Delta\geq 0$ είναι: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$\alpha x^2+\beta x=0\Leftrightarrow x(\alpha x+\beta)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

$\alpha x^2+\beta=0$. Λύνουμε ως προς x^2, τη φέρνουμε στη μορφή $x^2=\theta$ και εφόσον $\theta>0$, τότε $x=\pm\sqrt{\theta}$.

ii. Εξισώσεις 3^{ου} και άνω βαθμού.

Παραγοντοποιούμε και μετατρέπουμε την παράσταση σε γινόμενο παραγόντων έως δεύτερου βαθμού ή κάνουμε σχήμα Horner.

Ζ. ΑΝΙΣΟΤΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

i. Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης, μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό χωρίς να αλλάξουμε τη φορά, μπορούμε επίσης να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε με τον ίδιο θετικό αριθμό, επίσης χωρίς να αλλάξουμε τη φορά. Αν όμως διαιρέσουμε ή πολλαπλασιάσουμε με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, πρέπει να αλλάξουμε τη φορά. Με σύμβολα:

Αν $\alpha>\beta$, τότε $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$, $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$, και εφόσον $\gamma>0$, ισχύει ότι $\alpha\gamma>\beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}$, ενώ, αν $\gamma<0$, είναι $\alpha\gamma<\beta\gamma$ και $\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}$.

ii. Μεταξύ των μελών δύο ανισώσεων, σε καμιά περίπτωση δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση. Επιτρέπεται , εφόσον μιλάμε για ομοιόστροφες ανισώσεις, η πρόσθεση κατά μέλη και – με την προϋπόθεση ότι όλα τα μέλη είναι θετικές ποσότητες – ο πολλαπλασιασμός κατά μέλη. Συμβολικά:

Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma>\delta$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$ και , εφόσον $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί, $\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$

Ισχύουν επίσης οι σχέσεις: Αν α,β ομόσημοι, τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\dfrac{1}{\alpha}>\dfrac{1}{\beta}$ και

iii. αν α,β θετικοί και ν φυσικός, $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu<\beta^\nu$.

Τέλος, αν ν περιττός, τότε $\alpha<\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu<\beta^\nu$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

iv. Προσοχή στο εξής: Αν $x>1$, τότε $x^{\nu}>x$, ενώ, αν $0<x<1$ ισχύει ότι $x^{\nu}<x$.

v. Για να λύσουμε ανίσωση 2ου βαθμού, θυμόμαστε τις τρεις περιπτώσεις:

- Αν Δ<0, το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο, ίδιο με του α. Οπότε η απάντηση στην ανίσωση είναι πως ισχύει για κάθε χ πραγματικό ή πως είναι αδύνατη.
- Αν Δ=0, το τριώνυμο γράφεται σε μορφή ταυτότητας, οπότε είναι $(\kappa\chi+\lambda)^2\geq 0$ για κάθε χ.
- Αν Δ>0 ή βρούμε δύο ρίζες (με κοινό παράγοντα, διαφορά τετραγώνων ή «μάτι») τότε πριν απαντήσουμε στην ανίσωση, φτιάχνουμε πινακάκι, όπου για τιμές του χ μεταξύ των ριζών το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α και ομόσημο του α παντού αλλού.

Η. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ – ΠΗΛΙΚΟ

Μιλάμε για ανισώσεις της μορφής $\frac{A(\chi)}{B(\chi)}>0$ ή $\frac{A(\chi)}{B(\chi)}>\frac{\Gamma(\chi)}{\Delta(\chi)}$.

i. Για την μορφή:

$\frac{A(\chi)}{B(\chi)}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(\chi)\cdot B(\chi)>0 \\ B(\chi)\neq 0 \end{cases}$. Εφόσον τα Α(χ), Β(χ) είναι μέχρι δευτέρου βαθμού, φτιάχνουμε πινακάκι και συμπληρώνουμε τα πρόσημα. Αν είναι μεγαλύτερου βαθμού παραγοντοποιούμε ή κάνουμε Horner για να μειώσουμε το βαθμό.

ii. Για την μορφή:

$\frac{A(\chi)}{B(\chi)}>\frac{\Gamma(\chi)}{\Delta(\chi)} \Leftrightarrow \frac{A(\chi)}{B(\chi)}-\frac{\Gamma(\chi)}{\Delta(\chi)}>0$. Κάνουμε ομώνυμα, οπότε το φέρνουμε στη μορφή $\frac{E(\chi)}{Z(\chi)}>0$ και ακολουθούμε την πρώτη περίπτωση.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενο τις παρακάτω παραστάσεις:

a. $8x^3-27=$ b. $x^6-8=$ c. $x^3-64=$ d. $27x^3+y^3=$

e. $(2x-1)^2-16x^2=$ f. $(3x+2)^2-(2x-1)^2=$

Απαντήσεις : α. $(2\chi-3)\cdot(4\chi^2+6\chi+9)$ β. $(\chi^2-2)(\chi^4+2\chi^2+4)$ γ. $(\chi-4)(\chi^2+4\chi+16)$

δ. $(3\chi+y)(9x^2-3xy+y^2)$ ε. $(2\chi-1-4\chi)(2\chi-1+4\chi)=(-1-2\chi)(6\chi-1)$

στ. $(3\chi+2-2\chi+1)(3\chi+2+2\chi-1)=(\chi+3)(5\chi+1)$

2. Να συμπληρώσετε με τις κατάλληλες παραστάσεις τον πίνακα που ακολουθεί:

Αρχική	Συζυγής	Τελικά
$\sqrt{x^2+4}$		
$\sqrt[5]{x^2}$		
$\sqrt{x+3}-1$		
$2-\sqrt{x-4}$		
$\sqrt{x^2+x}-x$		
$\sqrt[3]{x}-2$		
$\sqrt[3]{x+8}-2$		

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις-ανισώσεις

α. $|2x-3|=1$ b. $|2x-3|=2|x+1|$ c. $|1-4x|=x+2$

d. $|1-2x|\le 3$ e. $|3-x|\ge 2$ f. $|3x+2|\le|x+2|$

a. $x=2$, $x=1$ b. $x=\frac{1}{4}$ c. $x=1, x=-\frac{1}{5}$ d. $-1\le x\le 2$ e. $x\le 1$ ή $x\ge 5$ f. $-1\le x\le 0$

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $x^2-2x+5>0$ b. $x^2-2x+5<0$ c. $x^2+4x\ge 0$ d. $x^2-3x\le 0$

e. $2x-4x^2\le 0$ f. $x^2-4x+4<0$ g. $4x^2+12x+9>0$ h. $x^2+4>0$

i. $x^2-x-2<0$ k. $4x^2-9\ge 0$ l. $x^2-7<0$ m. $12-x^2<0$

Απαντήσεις: a. $x\in\mathbb{R}$ b. αδύνατη c. $x\in(-\infty,-4]\cup[0,+\infty)$ d. $x\in[0,3]$

e. $x\in(-\infty,0]\cup[\frac{1}{2},+\infty)$ f. αδύνατη g. $x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$ h. $x\notin\mathbb{R}$

i. $x\in(-1,2)$ k. $x\in(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},+\infty)$ l. $x\in(-\sqrt{7},\sqrt{7})$ m. $(-\infty,-2\sqrt{3}]\cup[2\sqrt{3},+\infty)$

5. Να βρείτε τις τιμές του α, ώστε οι παρακάτω ανισώσεις να ισχύουν για κάθε α πραγματικό αριθμό:

α. $ax^2-(a+2)x+a\le 0$ (Απ: $a\in(-\infty,-\frac{2}{3})$) b. $x^2-(3a-2)x+(a-1)^2\ge 0$ (Απ: $a\in(\frac{3}{5},1)$)

6. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

α. $\eta\mu(3\pi-\alpha)=$ β. $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ γ. $\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

δ. $\sigma\varphi(\chi-5\pi)=$ ε. $\eta\mu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=$ ζ. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-3\pi)=$

Απαντήσεις: α. ημα β. −ημα γ. −σφα δ. σφχ ε. −συνα ζ. −συνα

7. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2<x<3$ και $1<y<4$, βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α. $3x-2y$ b. x^2-y^2 c. $10-xy$ d. $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}$ e. $y^2-\frac{12}{x}$

Απαντήσεις: α. $-2<3x-2y<7$ b. $-12<x^2-y^2<8$ c. $-2<10-xy<8$

d. $\frac{5}{3}<\frac{2}{x}+\frac{4}{y}<5$ e. $-5<y^2-\frac{12}{x}<12$

8. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{x^3-7x+6}{(x+1)^2}\geq 0$ b. $\frac{x^2-x-6}{x^3-8}\leq 0$ c. $\frac{2x-1}{x+2}<\frac{2x+3}{x-1}$

Απαντήσεις: a. $x\in(-\infty,-3]\cup[1,2]$ b. $x\in(-\infty,-2]\cup(2,3]$ c. $x\in(-2,-\frac{1}{2})\cup(1,+\infty)$

9. Να λυθούν οι παρακάτω τριγωνομετρικές εξισώσεις:

α. $ημ2x=0$ $(x=\frac{κπ}{2})$ β. $συν\frac{x}{2}=0$ $(x=2κπ+π)$ γ. $εφ3x=1$ $(x=\frac{κπ}{3}+\frac{π}{12})$

δ. $ημ2x=συν2x$ $(x=\frac{κπ}{2}+\frac{π}{8})$ ε. $συν2x=-\frac{1}{2}$ $(x=κπ\pm\frac{π}{3})$

στ. $ημ3x=-συν3x$ $(x=\frac{κπ}{3}-\frac{π}{12})$ ζ. $ημ2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(x=κπ-\frac{π}{6}$ ή $x=κπ+\frac{2π}{3})$

η. $ημ^2x-3ημx+2=0$ $(x=κπ+\frac{π}{2})$ θ. $ημ3x=-συνx$ $(x=κπ-\frac{π}{4}$ ή $x=\frac{κπ}{2}+\frac{3π}{8})$

10. Να λύσετε τις παρακάτω ομάδες εξισώσεων – ανισώσεων:

a. $\begin{cases} x^2-|x|-2=0 \\ e^{2x}-e^x-2=0 \\ \ln^2 x-\ln x-2=0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x^2-|x|-2\leq 0 \\ e^{2x}-e^x-2\geq 0 \\ \ln^2 x-\ln x-2>0 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x^3-7x+6=0 \\ \ln^3 x-7\ln x+6=0 \\ e^{3x}-7e^x+6=0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x^3-7x+6<0 \\ \ln^3 x-7\ln x+6\leq 0 \\ e^{3x}-7e^x+6\geq 0 \end{cases}$ e. $\begin{cases} (x-2)^2+2|x-2|=0 \\ (e^x-1)^2+2|e^x-1|=0 \\ (\ln x+2)^2-2|\ln x+2|=0 \end{cases}$ f. $\begin{cases} (x-2)^2+2|x-2|\leq 0 \\ (e^x-1)^2+2|e^x-1|>0 \\ (\ln x+2)^2-2|\ln x+2|\leq 0 \end{cases}$

Απαντήσεις:

a. $|x|=2\Leftrightarrow x=\pm 2$, $e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$, $x=\frac{1}{e}$ ή $x=e^2$ b. $x\in[-2,2]$, $x\in[\ln 2,+\infty)$, $x\in(0,\frac{1}{e})\cup(e^2,+\infty)$

c. $x=-3$ ή $x=1$ ή $x=2$, $x=\frac{1}{e^3}$ ή $x=e$ ή $x=e^2$, $x=0$ ή $x=\ln 2$

d. $x\in(-\infty,-3)\cup(1,2)$, $x\in(0,\frac{1}{e^3}]\cup[e,e^2]$, $x\in(-\infty,0]\cup[\ln 2,+\infty)$

e. $x=2$, $x=0$, $x=\frac{1}{e^2}$ ή $x=1$ ή $x=\frac{1}{e^4}$ f. $x=2$, $x\in\mathbb{R}^*$, $x\in[\frac{1}{e^4},1]$

11. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{2x-1}{x^2-x-2} \leq 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty,-1) \cup [\frac{1}{2},2)$

β. $\frac{x+3}{x^2-3x+2} > 0$ Απαντ.: $x \in (-3,1) \cup (2,+\infty)$

γ. $\frac{x-4}{x^2-x} \geq -1$ Απαντ.: $x \in (-\infty,-2] \cup (0,1) \cup [2,+\infty)$

δ. $\frac{x^2-x-2}{x^2-1} \geq 0$ Απαντ.: $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup [2,+\infty)$

ε. $\frac{|x|-2}{x^2-5x+6} \leq 0$ Απαντ.: $x \in [-2,2) \cup (2,3)$

12. Αν ισχύουν οι σχέσεις:

$2 < x < 3$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών βρίσκονται οι ποσότητες:

α. $-2x-y^2$ Απ: $(-5,2)$ β. $\frac{3}{x}-\frac{2}{y}$ Απ: $(-1,\frac{1}{2})$ γ. y^3-x^2+1 Απ: $(-7,5)$

13. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $3 < |1-2x| < 5$ $(x \in (-2,-1) \cup (2,3))$

b. $|x^2-3x+1| \leq 1$ $(x \in [0,1] \cup [2,3])$

c. $e^{2x-1}-e^{x+1} < 0$ $(x \in (-\infty,2))$

d. $\ln^2(x-\ln 2+1)+(e^x-2)^2 \leq 0$ $(x = \ln 2)$

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΕΔΙΑ ΟΡΙΣΜΟΥ</u>

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

a. $f(x)=\frac{\sqrt{x-2}}{x^2+3x+2}$ b. $f(x)=\frac{1-\ln(1-x)}{x^2-x}$ c. $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-x+2}}{\ln x-1}$

d. $f(x)=\sqrt{2-\ln 2x}+\sqrt{\ln(x-1)}$ e. $f(x)=\sqrt{e^{2x}-3e^x+2}$ f. $f(x)=\ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$

g. $f(x)=\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{4x+x^2}$ h. $f(x)=\ln(\sqrt{\ln x})$ i. $f(x)=\sqrt{2-\ln x}-\sqrt{e^x-3}$

j. $f(x)=\ln\left(\frac{x-2}{3-\ln x}\right)$ k. $f(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x-2}$ l. $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{|x-3|}}-\sqrt{\frac{x+1}{|x|+1}}$ Απαντήσεις:

a. $[2,+\infty)$ b. $(-\infty,0)\cup(0,1)$ c. $(0,e)\cup(e,+\infty)$ d. $[2,e^2/2]$ e. $[0,\ln 2]$ f. $(-1,3)$

g. $(-\infty,-4]\cup\{0\}\cup[2,+\infty)$ h. $(1,+\infty)$ i. $[\ln 3,e^2]$ j. $(2,e^3)$ k. $(0,1/e]\cup[e^2,+\infty)$

l. $[2,3)\cup(3,+\infty)$