ΓΕΠ3 - 2122 Απαντήσεις

A3. Ψευδής, μπορεί το όριο να μην υπάρχει. Πχ $\lim_{x\to 0} x$, $\lim \frac{1}{x}$

A4. Σωστό - Σωστό - Λάθος - Λάθος - Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Ζητώ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow 0 = a = f(0)$

Για $a=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - bx - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-}(e^x - b) = 1 - b \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3 - 3x^2}{x} = 0 \end{array}\right\} \quad b = 1$$

B2.

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x - 1, & x<0 \\ 2x^3 - 3x^2, & x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x<0 \\ 6x^2 - 6x, & x \geq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f'		−	0	−	0	+	
f		$\searrow$		$\searrow$	ε.ε.	$\nearrow$	

$\lim_{x\to -\infty}(e^x - x - 1) = +\infty \quad f(0) = 0$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

για $x = 1$, $f(1) = -1$

άρα: $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f(x) \in [-1, +\infty)$ Σύνολο τιμών $= [-1, +\infty)$

$x \in [1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in [-1, +\infty)$

B3.

$$f''(x) = \begin{cases} e^x, & x<0 \\ 12x - 6, & x > 0 \end{cases}$$

		0		1/2	
	+		−	0	+

σημ. καμπής $(0,0)$ $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

B4. Πρέπει $\eta\mu\kappa + \kappa - 1 > -1 \Rightarrow \eta\mu\kappa + \kappa > 0 \Rightarrow \eta\mu\kappa > \kappa \Rightarrow \kappa < 0$.

B5. Το πρόσημο της f:

−1		0		1
	+	0	−	

$$E = \int_{-1}^{0} (e^x - x - 1)dx + \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{0} + \left[-\frac{x^4}{2} + x^3\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Παραγωγίζω τη δοσμένη σχέση: $(2e^{f(x)}+1)f'(x)=1 \Rightarrow$

$f'(x)=\dfrac{1}{2e^{f(x)}+1}$, $f'(x)>0$ άρα f γν. αύξουσα.

Για $x=0$: $2e^{f(0)}+f(0)-2=0$. ⊛

Θέτω $g(x)=2e^x+x-2$, $g(0)=0$, $g'(x)=2e^x+1>0$, $g\nearrow$

άρα η ⊛ γράφεται: $g(f(0))=0=g(0) \Rightarrow f(0)=0$

Γ2. Αφού $f'(x)=\dfrac{1}{2e^{f(x)}+1}$, η f' είναι πηλίκο παραγωγ.

άρα $f''(x)=-\dfrac{2e^{f(x)}f'(x)}{(2e^{f(x)}+1)^2}<0$ αφού $f'(x)>0$, δηλ. f κοίλη.

Γ3. Έστω F μια αρχική της f. Η ανίσωση γράφεται:

$F(\alpha+1)-F(\alpha)<F(\alpha+2)-F(\alpha+1)$.

Με 2 ΘΜΤ, $\exists\ \xi_1\in(\alpha,\alpha+1)$: $f(\xi_1)=F(\alpha+1)-F(\alpha)$

$\exists\ \xi_2\in(\alpha+1,\alpha+2)$: $f(\xi_2)=F(\alpha+2)-F(\alpha+1)$

Όμως, $\xi_1<\xi_2 \underset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(\xi_1)<f(\xi_2) \Rightarrow F(\alpha+1)-F(\alpha)<F(\alpha+2)-F(\alpha+1)$

Γ4. Η f^{-1} υπάρχει αφού $f\nearrow$ και ορίζεται στο $\mathbb{R}=f(\mathbb{R})$.

Η αρχική σχέση για $y=f(x)$ γίνεται: $2e^y+y=x+2 \Rightarrow$

$f^{-1}(x)=2e^x+x-2$. Επίσης, για $x>0 \Rightarrow f(x)>0$ $(f\nearrow)$

άρα $E=\int_0^{2e-1}f(x)dx$. Θέτω $u=f(x) \Rightarrow f^{-1}(u)=x \Rightarrow$

$(f^{-1})'(u)du=dx$ και $f^{-1}(1)=2e-1$

$\Rightarrow 1=f(2e-1)$

άρα $E=\int_0^1 u\cdot(f^{-1})'(u)\,du=\left(uf^{-1}(u)\right)_0^1-\int_0^1(2e^u+u-2)du=$

$2e-1-\left[2e^u+\frac{u^2}{2}-2u\right]_0^1=2e-1-\left(2e-\frac{3}{2}-2\right)$

$=-1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$ τ.μ.α.

Δ1. Η δοσμένη: $x f'(x) - f(x) = -x \cdot e^{\frac{f(x)}{x}} \Rightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = -\frac{e^{\frac{f(x)}{x}}}{x}$

$\Rightarrow -\frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} e^{-\frac{f(x)}{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow \left(e^{-\frac{f(x)}{x}}\right)' = (\ln x)' \Rightarrow$

$e^{-\frac{f(x)}{x}} = \ln x + c \overset{f(e)=0}{\Rightarrow} c = 0$ άρα $e^{-\frac{f(x)}{x}} = \ln x \Rightarrow$

$-\frac{f(x)}{x} = \ln(\ln x) \Rightarrow f(x) = -x \ln(\ln x)$

Δ2. $f'(x) = -\ln(\ln x) - \frac{1}{\ln x}$ $\quad f''(x) = -\frac{1}{x \ln x} + \frac{1}{x \ln^2 x} \Rightarrow$

$f''(x) = \frac{1 - \ln x}{x \ln^2 x}$

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & & e & & \\ \hline f'' & \| & + & 0 & - & \\ f & & \cup & & \cap & \end{array}$$

σ. καμπής $(e, 0)$

και η εφ/νη στο $(e, 0)$: $y = -x + e \ (\varepsilon)$

Δ3. Από το Δ2:

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & & e & & \\ \hline f'' & \| & + & 0 & - & \\ f' & & \nearrow & & \searrow & \end{array}$$

άρα η f' έχει μέγιστο για $x = e$, $f'(e) = -1$

συνεπώς $f'(x) < 0$ άρα $f \searrow$ στο $(1, +\infty)$.

Αν $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x) \in \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Η εξίσωση $\alpha (\ln x)^x = 1 \Rightarrow (\ln x)^x = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow -x \ln(\ln x) = \ln \alpha$.

Επειδή $\ln \alpha \in \mathbb{R}$ για κάθε $\alpha > 0$ η εξίσωση $f(x) = \ln \alpha$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(1, +\infty)$

Δ4. Αν $x \in [2, e]$, η $f(x)$ είναι κυρτή, συνεπώς $f(x) \geq (\varepsilon)$

δηλ. $f(x) \geq -x + e$ άρα $\int_2^e f(x)\,dx > \int_2^e (-x + e)\,dx \Rightarrow$

$\int_2^e f(x)\,dx > \left[-\frac{x^2}{2} + ex\right]_2^e = \dots = \frac{(e-2)^2}{2}$.