ΓΕΠ2 - 2122

Α3. Αληθής. Αν F αρχική της f, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=0 \Leftrightarrow F(\alpha)=F(\beta)$.
Συνεπώς, με Θ. Rolle για την F, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $F'(\xi)=f(\xi)=0$

Α4. Σωστό - Λάθος - Σωστό - Λάθος - Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Ζητώ $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0) \Rightarrow 2+\alpha=0 \Rightarrow \alpha=-2$.

Επίσης, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{\eta\mu2x}{x}-2}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu2x-2x}{x^2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2\sigma\upsilon\nu2x-2}{2x}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+\beta x}{x}=\beta$ και πρέπει $\beta=0$

Β2. Έστω $g(x)=\varepsilon\varphi2x-2x$. Είναι $g'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}\cdot2-2=\dfrac{2(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}>0$
άρα $g\nearrow$ στο $(0,\pi/4)$ άρα $g(x)\in(0,+\infty)$ συνεπώς $\varepsilon\varphi2x>2x$.

Β3.
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x\,\sigma\upsilon\nu2x-\eta\mu2x}{x^2}, & x\in(0,\pi/4]\\[2ex] 2x, & x\in[-\pi/2,0]\end{cases}$$
, $x\in[-\pi/2,0]$. Απ' το (Β2), $\varepsilon\varphi2x>2x$

άρα $\dfrac{\eta\mu2x}{\sigma\upsilon\nu2x}>2x \Rightarrow \eta\mu2x>2x\sigma\upsilon\nu2x \Rightarrow f'(x)<0$ στο $(0,\pi/4]$

ενώ $f'(x)=2x<0$ για κάθε $x\in(-\pi/2,0)$, συνεπώς $f\searrow$ στο $[-\pi/2,\pi/4]$

Αφού $x\in[-\pi/2,\pi/4]$ και $f\searrow$, $f(x)\in[f(\pi/4),f(-\pi/2)]$ άρα
$f(x)\in\left[\frac{4}{\pi}-2,\frac{\pi^2}{4}\right]$ = σύνολο τιμών της f.

Β4. Αν το k^2 ανήκει στο $\left[\frac{4}{\pi}-2,\frac{\pi^2}{4}\right]$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα, διαφορετικά είναι αδύνατη.
Συνεπώς, μοναδική ρίζα αν: $\frac{4}{\pi}-2\le k^2\le\frac{\pi^2}{4}$. Η ανίσωση
$k^2\ge\frac{4}{\pi}-2$ ισχύει για κάθε $k\in\mathbb{R}$, ενώ $k^2\le\frac{\pi^2}{4} \Rightarrow$
$k\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.
Τελικά έχει μοναδική ρίζα αν $k\in[-\pi/2,\pi/2]$ ενώ είναι αδύνατη αν $k\notin[-\pi/2,\pi/2]$.

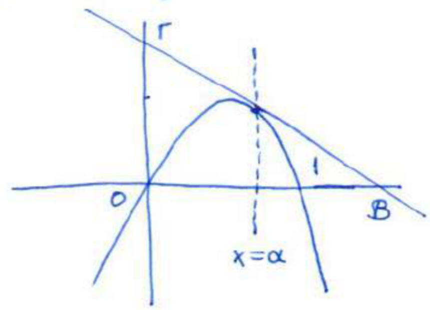
ΘΕΜΑ Γ. ΓΕΠ2 - 2122

$f(x) = -x^2 + 6x\cdot\int_0^1 f(x)\,dx.$

Γ1. Έστω $c=\int_0^1 f(x)\,dx \Rightarrow c=\int_0^1(-x^2+6xc)\,dx \Rightarrow$

$c=\left[-\frac{x^3}{3}+3x^2c\right]_0^1 \Rightarrow c=-\frac{1}{3}+3c \Rightarrow 2c=\frac{1}{3} \Rightarrow c=\frac{1}{6}$

συνεπώς $f(x)=-x^2+x$, $E=\int_0^1(-x^2+x)\,dx=\frac{1}{6}$



Γ2. $E(\alpha)=\int_0^\alpha(-x^2+x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha$

$\Rightarrow E(\alpha)=-\frac{\alpha^3}{3}+\frac{\alpha^2}{2}.$

Εφόσον το α μεταβάλλεται με το χρόνο

$E(t)=-\frac{\alpha^3(t)}{3}+\frac{\alpha^2(t)}{2}$, συνεπώς

$E'(t)=-\alpha^2(t)\cdot\alpha'(t)+\alpha(t)\cdot\alpha'(t)$ και για $t=t_0$,

$E'(t_0)=-\left(\frac{2}{5}\right)^2\cdot 0{,}1+\frac{2}{5}\cdot 0{,}1=+\frac{0{,}6}{25}$ τ.μ./s $=0{,}024$ τ.μ/s.

Γ3. Η εφ/νη στο α: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)\Rightarrow y-(-\alpha^2+\alpha)=(-2\alpha+1)(x-\alpha)$

$\Rightarrow y=(-2\alpha+1)x+2\alpha^2-\alpha-\alpha^2+\alpha \Rightarrow y=(-2\alpha+1)x+\alpha^2.$

Για $x=0$, $y=\alpha^2$ ενώ για $y=0$, $x=\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}>0$ για $\alpha\in(\frac{1}{2},1)$.

Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ δίνεται από την σχέση

$g(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{2\alpha-1}=\frac{\alpha^4}{4\alpha-2}$. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\frac{x^4}{4x-2}$, $x\in[\frac{1}{2},1]$

με $g'(x)=\frac{4x^3(4x-2)-4x^4}{(4x-2)^2}=\frac{12x^4-8x^3}{(4x-2)^2}=\frac{4x^3(3x-2)}{(4x-2)^2}$

Επειδή $\frac{4x^3}{(4x-2)^2}>0$, έχουμε:

x	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		1
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Συνεπώς το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν $x=\alpha=\frac{2}{3}$.

ΘΕΜΑ Δ ΓΕΠ2 - 2122

Δ1. Είναι $f'(x) = \frac{2\ln x}{x} - 1 = \frac{2\ln x - x}{x}$.

Αν $h(x) = 2\ln x - x$, $x \in (0, +\infty)$, είναι $h'(x) = \frac{2-x}{x}$ και

x	0		2		$+\infty$
h'	‖	+	0	−	
h		↗		↘	

δηλαδή η $h(x)$ έχει μέγιστο για $x=2$ το $h(2) = 2\ln 2 - 2 = 2(\ln 2 - 1) < 0$, συνεπώς $h(x) \le 2(\ln 2 - 1) < 0$ άρα $f'(x) < 0$, δηλ. $f \searrow$.

Επίσης, $f(1) = -2$ και $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, δηλαδή υπάρχει α κοντά στο 0 ώστε $f(\alpha) > 0$. Με Θ. Bolz. στο $(\alpha, 1)$, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 1)$ ώστε $f(x_0) = 0$, το μοναδικό γιατί $f \searrow$.

Δ2. $f''(x) = 2\,\frac{1-\ln x}{x^2}$

x	0		e	
f''	‖	+	0	−
f		∪		∩

σημ. καμπής $(e, -e)$.

Η εφ/νη στο $x_0 = e$: $y + e = \left(\frac{2}{e} - 1\right)(x - e) \Rightarrow y = \left(\frac{2}{e} - 1\right)x - 2$.

Δ3. Θεωρώ τη συνάρτηση $G(x) = F(x+1) - F(x)$. Επειδή $G'(x) = f(x+1) - f(x) < 0$ (επειδή $f \searrow$), η G είναι γν. φθίνουσα.

Η δοσμένη ανίσωση γράφεται: $G(\ln^4 x + 2021) < G(4\ln^2 x + 2021)$

$\Rightarrow \ln^4 x > 4\ln^2 x \Rightarrow \ln^2 x\,(\ln^2 x - 4) > 0$

	e^{-2}		e^2	
+	0	−	0	+

άρα $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (e^2, +\infty)$.

Δ4. Η συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα με ρίζα x_0 και το πρόσημό της είναι $x_0 < x < 1 \overset{f \searrow}{\Rightarrow} 0 > f(x) > -2$ άρα $E = -\int_{x_0}^{1} f(x)\,dx$.

Επίσης, αφού $f(x_0) = 0 \Rightarrow \ln^2 x_0 = x_0 + 1$ και $\ln x_0 = -\sqrt{x_0 + 1}$.

Είναι $E = -\int_{x_0}^{1} \ln^2 x\,dx + \int_{x_0}^{1} (x+1)\,dx = -\left\{\left[x\ln^2 x\right]_{x_0}^{1} - \int_{x_0}^{1} 2\ln x\,dx\right\} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{x_0}^{1}$

$= \ldots = x_0 \ln^2 x_0 - 2 - 2x_0 \ln x_0 + 2x_0 + \frac{3}{2} - \frac{x_0^2}{2} - x_0 = \ldots =$

$= \frac{x_0^2}{2} + 2x_0\left(1 + \sqrt{x_0 + 1}\right) - \frac{1}{2}$.