Θεμα Β

Β1. $f'(x) = \dfrac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \dfrac{2x\cdot(x-1) - x^2\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$

$= \dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ή $x = 2$

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	Τ.Μ	$\searrow$	‖	$\searrow$	Τ.Ε	$\nearrow$	

η f γν. αύξουσα στα $(-\infty, 0]$ κ' $[2, +\infty)$

ενώ γν. φθίνουσα στα $[0, 1)$ κ' $(1, 2]$

Β2. $A_1 = (-\infty, 0]$, $f \nearrow$ $\Big\}$ $\xRightarrow[\text{συνεχής}]{f}$ $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), f(0)\right]$

$= (-\infty, 0]$

$A_2 = [0, 1)$, $f \searrow$ $\Big\}$ $\xRightarrow[\text{συνεχής}]{f}$ $f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), f(0)\right]$

$= (-\infty, 0]$

$A_3 = (1, 2]$, $f \searrow$ $\Big\}$ $\xRightarrow[\text{συνεχής}]{f}$ $f(A_3) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)$

$= [4, +\infty)$

$A_4 = [2, +\infty)$, $f \nearrow$ $\Big\}$ $\xRightarrow[\text{συν}]{f}$ $f(A_4) = \left[f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$

$= [4, +\infty)$

Τελικά $\boxed{f(A) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)}$

B3 Για να είναι αδύνατη, θα πρέπει $\ln\alpha \in (0,4)$

$\Leftrightarrow 0 < \ln\alpha < 4 \Leftrightarrow e^0 < \alpha < e^4 \Leftrightarrow \boxed{1 < \alpha < e^4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 $x \cdot f'(x) = f(x) + 2x - x^2 \Leftrightarrow x \cdot f'(x) - f(x) = 2x - x^2$

$\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{x \cdot f'(x) - f(x)}{x^2} = \dfrac{2x - x^2}{x^2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = \dfrac{2}{x} - 1$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = (2\ln x - x)' \overset{\Sigma\Theta\text{ΜΤ}}{\Leftrightarrow} \dfrac{f(x)}{x} = 2\ln x - x + c$ (1)

για $x = 2$: $\dfrac{f(2)}{2} = 2\ln 2 - 2 + c \Leftrightarrow \dfrac{\ln 16 - \ln e^4}{2} = \ln 4 - 2 + c$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cancel{2}\ln 4}{\cancel{2}} - \dfrac{4}{2} = \ln 4 - 2 + c \Leftrightarrow \ln 4 - 2 = \ln 4 - 2 + c$

$\Leftrightarrow c = 0$, άρα από (1): $\boxed{f(x) = 2x\ln x - x^2, \ x > 0}$

Γ2 Είναι $f'(x) = (2x)'\ln x + 2x(\ln x)' - (x^2)'$

$= 2\ln x + 2\cancel{x} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} - 2x = 2\ln x - 2x + 2$

$= 2(\ln x - x + 1)$

Ισχύει ότι $\ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x + 1 \leq 0$

Άρα $f'(x) \leq 0$ με το "=" να ισχύει μόνο

για $x = 1$. Άρα η f γν. φθίνουσα

. $f''(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{x} - 2 = \dfrac{2(1-x)}{x}$, $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0		1		$+\infty$
f''		+	0	−	
f'		↗		↘	

η f' γν. αύξουσα στο $(0,1]$

f' γν. φθίνουσα στο $[1,+\infty)$

• **B** Η προς απόδειξη σχέση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1) - f(x) > f(x+3) - f(x+2)$. ②. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την ②.

▸ ΘΜΤ για την f στο $[x, x+1]$ (ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις)

υπάρχει $\xi_1 \in (x, x+1)$ τ.ω. $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x}$

$\Rightarrow f'(\xi_1) = f(x+1) - f(x)$

▸ ΘΜΤ για την f στο $[x+2, x+3]$

υπάρχει $\xi_2 \in (x+2, x+3)$ τ.ω. $f'(\xi_2) = \dfrac{f(x+3) - f(x+2)}{x+3-x-2}$

$\Rightarrow f'(\xi_2) = f(x+3) - f(x+2)$

Επειδή $x > 1$ κ' η f' γν. φθίν στο διάστημα αυτό, θα είναι: $\xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$

$\Rightarrow f(x+1) - f(x) > f(x+3) - f(x+2)$ ~~⇒~~

αποδείχθηκε η ②.

~~f(x+κ...)~~

Δ1 $f(x)-f'(x)=x+\frac{1}{x}-\ln x-1 \Leftrightarrow$

$f(x)+\ln x-x=f'(x)+\frac{1}{x}-1 \Leftrightarrow f(x)+\ln x-x=(f(x)+\ln x-x)'$

εφαρμογή
$\Longrightarrow$ $f(x)+\ln x-x=c\cdot e^{x}$

Σχολ. Βιβλίου για $x=1$: $f(1)+\ln 1-1=c\cdot e^{1}$

$\Leftrightarrow f(1)-1=ce \Rightarrow e+\cancel{1}-\cancel{1}=ce \Rightarrow c=1$

άρα $f(x)+\ln x-x=e^{x} \Rightarrow f(x)=e^{x}+x-\ln x,\ x>0$

Δ2 Αρκεί ν.δ.ο η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$. Είναι $f'(x)=e^{x}+1-\frac{1}{x}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(1)=e+1-1=e>0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{x}+1-\frac{1}{x}\right)=-\infty$, άρα υπάρχει a κοντά στο 0^+ τ.ω $f'(a)<0$ $(f'(1)\cdot f'(a)<0)$
- f συνεχής στο $[a,1]$, οπότε ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano για την f' στο $[a,1]$, συνεπώς υπάρχει 1 τουλ. $x_0\in(a,1)\subseteq(0,1)$ τ.ω $f'(x_0)=0$

Επιπλέον $f''(x)=e^{x}+\frac{1}{x^2}>0 \longrightarrow f'$ γν. αύξ.

επομένως το x_0 μοναδικό

$\underline{\Delta 3}$ Θα δείξουμε πρώτα ότι $ex+1<f(x)$

$\Leftrightarrow ex+1<e^x+x-\ln x.$

Θεωρούμε συνάρτηση $w(x)=ex+1-e^x-x+\ln x$, $x>0$

με τ' $w'(x)=e-e^x-1+\frac{1}{x}$

$w''(x)=-e^x-\frac{1}{x^2}<0 \rightarrow w'$ γν. φθίν

· για $x>1 \overset{w'\downarrow}{\Longrightarrow} w'(x)<w'(1) \Rightarrow w'(x)<0 \Rightarrow w$ γν. φθίν

άρα για $x>1 \overset{w\downarrow}{\Longrightarrow} w(x)<w(1) \Rightarrow w(x)<0$

$\Rightarrow ex+1-e^x-x+\ln x<0 \Rightarrow ex+1<e^x+x-\ln x$

ή $e\cdot x+1<f(x)$

· Θα δείξουμε ότι $f(x)<f'(x)(x-1)+e+1$

▷ ΘΜΤ για την f στο $[1,x]$ (ισχύουν όλες οι υποθέσεις)

υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τ.ω $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(x)-e-1}{x-1}$ (1)

Επιπλέον: $\xi<x \overset{f'\uparrow}{\Longrightarrow} f'(\xi)<f'(x)$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \frac{f(x)-(e+1)}{x-1}<f'(x) \Rightarrow f'(x)(x-1)>f(x)-(e+1)$

$\Leftrightarrow f(x)<f'(x)(x-1)+e+1$