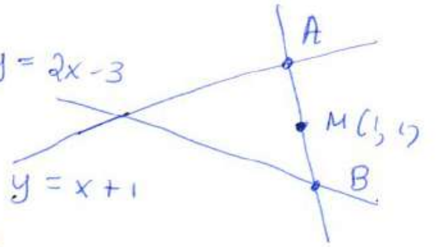
Ασκήσεις στην ευθεία (1) - 2122

1) Έστω $A(x_A, x_A+1)$ και $B(x_B, 2x_B-3)$. Πρέπει

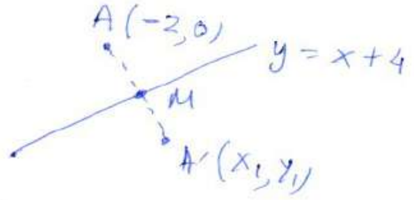


$x_A+x_B=2$ και $x_A+1+2x_B-3=2$

$$\begin{cases} x_A+2x_B=4 \\ x_A+x_B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_B=2 \\ x_A=0 \end{matrix}$$

άρα $A(0,1)$ και $B(2,1)$ συνεπώς η AB είναι η $y=1$

2) Είναι $\lambda_{AA'}=-1$ άρα $AA': y=-x-2$



συνεπώς το M $\begin{cases} y=x+4 \\ y=-x-2 \end{cases}$ δηλ $x+4=-x-2$

$x=-3, \ y=1$

δηλ $M(-3,1)$ άρα: $\dfrac{x_1-2}{2}=-3$ και $\dfrac{y_1+0}{2}=1 \Rightarrow A'(-4,2)$

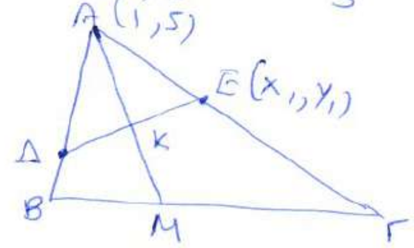
3) Το σύστημα των δύο ευθειών έχει λύση τις συντεταγμένες του A δηλ. $\dfrac{5x}{3}+\dfrac{10}{3}=x+4 \Rightarrow 5x+10=3x+12 \Rightarrow x=1, \ y=5$ δηλ. $A(1,5)$.

Έστω Δ τυχαίο σημείο της $y=\dfrac{5}{3}x+\dfrac{10}{3}$, ας είναι $\Delta\left(-1, \frac{5}{3}\right)$.

Το συμμετρικό του Δ ως προς την διχοτόμο $y=x+4$ θα ανήκει στην ΑΓ.

Φέρνω $\Delta E \perp AM$. $\lambda_{\Delta E}=-1$ και $\Delta E \to y-\dfrac{5}{3}=-(x+1), \ y=-x+\dfrac{2}{3}$.

Για να βρούμε το Κ, εξισώνω: $x+4=-x+\dfrac{2}{3}$



$\Rightarrow 2x=-\dfrac{10}{3} \Rightarrow x=-\dfrac{5}{3}, \ y=\dfrac{7}{3}$ δηλ $K\left(-\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

συνεπώς $\dfrac{x_1-1}{2}=-\dfrac{5}{3}$ και $\dfrac{y_1+5/3}{2}=\dfrac{7}{3} \Rightarrow$

$3x_1-3=-10 \Rightarrow x_1=-\dfrac{7}{3}$ $\quad 3y_1+5=14 \Rightarrow y_1=3$ άρα $E\left(-\frac{7}{3}, 3\right)$

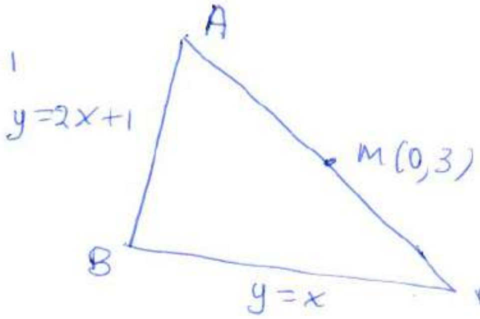
Συνεπώς, $\lambda_{A\Gamma}=\dfrac{3-5/3}{-\frac{7}{3}+1}=\dfrac{\frac{4}{3}}{-\frac{4}{3}}=-1$ δηλ. $A\Gamma \to y-5=-(x-1) \Rightarrow$

$$\boxed{y=-x+6}$$

4) Οι ευθείες που ζητάμε έχουν $\lambda=1$ ή $\lambda=-1$

συνεπώς: $\left.\begin{matrix} y+3=x-2 \\ \text{ή} \quad y+3=-(x-2) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} y=x-5 \\ y=-x-1 \end{matrix}$

Ασκήσεις στην ευθεία (1) - 2122



5) Για το B: $2x+1=x \Rightarrow x=-1,\ y=-1$
δηλ. $B(-1,-1)$.

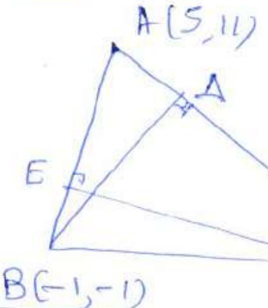
Έστω $A(x_A, 2x_A+1)$ και $\Gamma(x_\Gamma, x_\Gamma)$

Ζητώ $x_A+x_\Gamma=0$ και $2x_A+1+x_\Gamma=6$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_A+x_\Gamma=5 \\ x_A+x_\Gamma=0 \end{cases} \Rightarrow x_A=5,\ x_\Gamma=-5$

δηλ. $A(5,11)$ $\Gamma(-5,-5)$ $\lambda_{A\Gamma}=\frac{-16}{-10}=\frac{8}{5}$

άρα $A\Gamma \rightarrow y+5=\frac{8}{5}(x+5) \Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{5}x+3}$



6) Το ύψος $y=\frac{5}{8}x-\frac{3}{8}$ περνά από το B

δηλ. $B\Delta: y=\frac{5}{8}x-\frac{3}{8}$ ενώ το ύψος $y=\frac{1}{2}x$

δεν περνά από το A, συνεπώς $\Gamma E: y=\frac{1}{2}x$

Είναι $\lambda_{A\Gamma}=-\frac{8}{5}$ άρα η εξίσωση της AΓ

είναι η: $y-11=-\frac{8}{5}(x-5) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{8}{5}x+19}$, δηλ. το Γ είναι

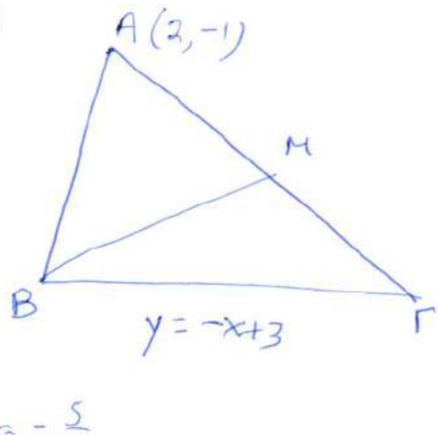
η λύση του: $\left.\begin{aligned} y&=-\frac{8}{5}x+19 \\ y&=\frac{1}{2}x \end{aligned}\right\}$ $\frac{1}{2}x=-\frac{8}{5}x+19 \Rightarrow 5x=-16x+190$

$x=\frac{190}{21}$ $y=\frac{85}{21}$ $\Gamma\left(\frac{190}{21},\frac{85}{21}\right)$

$\lambda_{AB}=-2$ άρα $AB: y-11=-2(x-5)$ δηλ. $AB: \boxed{y=-2x+21}$

και $\lambda_{B\Gamma}=\dfrac{\frac{85}{21}+1}{\frac{190}{21}+1}=\frac{106}{211}$ άρα $B\Gamma \rightarrow y+1=\frac{106}{211}(x+1) \Rightarrow$

$\boxed{B\Gamma: y=\frac{106}{211}x+\frac{105}{211}}$



7) $BM: y=-2x$ Για το B: $-x+3=-2x \Rightarrow$
$x=-3,\ y=6$

δηλ. $B(-3,6)$, άρα $\lambda_{AB}=\frac{7}{-5}$

και $AB: y+1=-\frac{7}{5}(x-2) \Rightarrow y=-\frac{7}{5}x+\frac{9}{5}$

Έστω $\Gamma(x_\Gamma, -x_\Gamma+3)$ και $M(x_M, -2x_M)$

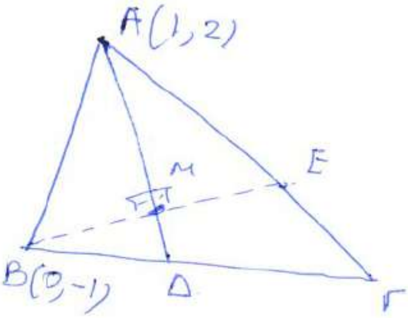
άρα: $x_\Gamma+2=2x_M$ $\quad -x_\Gamma+3-1=-4x_M$

$\Rightarrow 4=-2x_M \Rightarrow x_M=-2,\ x_\Gamma=-6$

δηλ. $M(-2,4)$ $\Gamma(-6,9)$ $\lambda_{A\Gamma}=\frac{10}{-8}=-\frac{5}{4}$

άρα $A\Gamma \rightarrow y+1=-\frac{5}{4}(x-2) \Rightarrow \boxed{y=-\frac{5}{4}x+\frac{3}{2}}$

8) $B\Gamma: y = 2x - 1$, $\lambda_{BE} = -1$ άρα η ευθεία



$BE: y+1 = -x \Rightarrow y = -x-1$

Το M: $x+1 = -x-1 \Rightarrow x = -1 \quad y = 0$

δηλ. $M(-1,0)$ και αν $E(x_1, y_1)$ τότε

$\dfrac{x_1 + 0}{2} = -1 \Rightarrow x_1 = -2 \qquad \dfrac{y_1 - 1}{2} = 0 \Rightarrow y_1 = 1$

άρα $E(-2,1)$ συνεπώς $\lambda_{AE} = \dfrac{1-2}{-2-1} = \dfrac{1}{3}$ άρα

$A\Gamma \rightarrow y - 2 = \frac{1}{3}(x-1) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}$ συνεπώς για την κορυφή Γ λύνω το (Σ)

$$\left.\begin{aligned} y &= \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3} \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}\right\} \quad 6x - 3 = x + 5 \Rightarrow x = 8/5 \quad y = 11/5$$

άρα $\Gamma(8/5, 11/5)$

Το $AB\Gamma Z$ παρ/μο $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{Z\Gamma}$. Έστω $Z(x_Z, y_Z)$ δηλ.

$(-1,-3) = \left(\frac{8}{5} - x_Z, \frac{11}{5} - y_Z\right) \Rightarrow x_Z = \frac{13}{5}, \; y_Z = \frac{26}{5} \quad Z\left(\frac{13}{5}, \frac{26}{5}\right)$.

Για το εμβαδόν του παρ/μου, βρίσκω το $B\Gamma = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{256}{25}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$

την εξίσωση του ύψους AK, δηλ. $\lambda_{AK} = -\frac{1}{2}$ άρα

$AK: y - 2 = -\frac{1}{2}(x-1)$, $\boxed{y = -\frac{1}{2}x + 5/2}$ συνεπώς το K

είναι λύση του συστήματος: $\cancel{-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}} \Rightarrow \cancel{-9x + 15 = x + 5}$

$\Rightarrow$ ~~$x = 1$, $y = 2$ άρα $k(1,2)$ συνεπώς~~

$-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} = 2x - 1 \Rightarrow -x + 5 = 4x - 2 \Rightarrow x = 7/5, \; y = 9/5$ άρα

$k(7/5, 9/5)$ δηλ. $AK = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

συνεπώς το $AB\Gamma Z$ έχει εμβαδόν $= \frac{8\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{8}{5}$ τ.μονάδα.

9) Για το S_1: $\left.\begin{aligned} x &= 2t + 3 \\ y &= 3t - 5 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 3x &= 6t + 9 \\ -2y &= -6t + 10 \end{aligned}\right\} \quad 3x - 2y = 19$

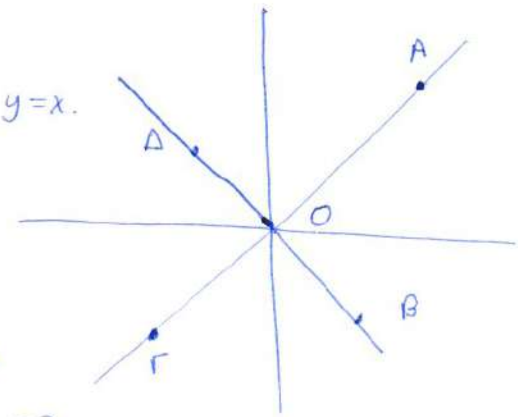
$\left.\begin{aligned} x &= 15 - t \\ y &= 15 - 2t \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} -2x &= -30 + 2t \\ y &= 15 - 2t \end{aligned}\right\} \quad -2x + y = -15$

Λύνω το σύστημά τους: $y = 2x - 15$, $3x - 4x + 30 = 19 \Rightarrow x = 11$, $y = 7$

δηλ. συναντιούνται στο $M(11, 7)$

που προκύπτει για $t = 4\,h$.

10) $A\Gamma = 8\sqrt{2}$ $\quad B\Delta = 6\sqrt{2}$



Έστω $A(x_A, x_A)$ το σημείο πάνω στην $y=x$.
Πρέπει $OA = 4\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x_A^2 + x_A^2} = 4\sqrt{2}$
$\Rightarrow 2x_A^2 = 16 \cdot 2 \Rightarrow x_A = 4$, συνεπώς
$A(4,4)$, $\Gamma(-4,-4)$.

Ομοίως, αν $B(x_B, -x_B)$, πρέπει $OB = 3\sqrt{2}$
άρα $\sqrt{x_B^2 + x_B^2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow x_B^2 = 9 \Rightarrow x_B = 3$
δηλ. $B(3,-3)$ και $\Delta(-3,3)$.

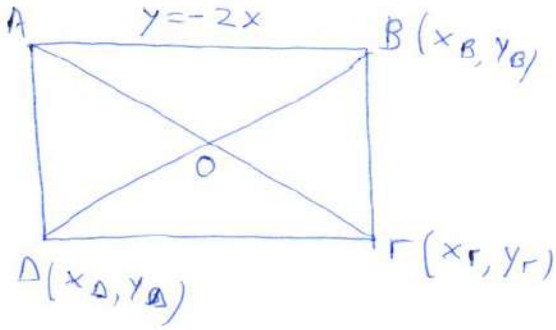
$\lambda_{AB} = \lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{-7}{-1} = 7$ συνεπώς $AB: y-4 = 7(x-4) \Rightarrow y = 7x - 24$

$\Gamma\Delta: y-3 = 7(x+3) \Rightarrow y = 7x + 24$

$\lambda_{A\Delta} = \lambda_{B\Gamma} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$ άρα $A\Delta: y-4 = \frac{1}{7}(x-4) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{24}{7}$

$B\Gamma: y+3 = \frac{1}{7}(x-3) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{18}{7}$

11) Έστω $A\Gamma: y = x-3$
$B\Delta: y = 2x+1$.



Τότε, για να βρω το A λύνω το

$(\Sigma): \left.\begin{array}{l} y = x-3 \\ y = -2x \end{array}\right\}$ $-2x = x-3 \Rightarrow x = 1$, $y = -2$

δηλ. $\boxed{A(1,-2)}$ και για το O: $\left.\begin{array}{l} y = 2x+1 \\ y = x-3 \end{array}\right\}$ $x = -4$, $y = -7$ δηλ. $O(-4,-7)$

Για το B: $\left.\begin{array}{l} y = 2x+1 \\ y = -2x \end{array}\right\}$ $x = -1/4$, $y = 1/2$ δηλ. $\boxed{B(-1/4, -1/2)}$

και $\frac{x_\Gamma + 1}{2} = -4$ $\quad \frac{y_\Gamma - 2}{2} = -7 \Rightarrow x_\Gamma = -9$ $\quad y_\Gamma = -12$ άρα $\Gamma(-9,-12)$

και $\frac{x_\Delta - 1/4}{2} = -4$ $\quad \frac{y_\Delta - 1/2}{2} = -7 \Rightarrow x_\Delta = -\frac{31}{4}$, $y_\Delta = -\frac{27}{4}$ άρα $\Delta\left(-\frac{31}{4}, -\frac{27}{4}\right)$

$\lambda_{A\Delta} = \frac{1}{2}$ άρα $A\Delta: y+2 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

$\lambda_{B\Gamma} = \frac{1}{2}$ $\quad B\Gamma: y+12 = \frac{1}{2}(x+9) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{15}{2}$

$\lambda_{\Delta\Gamma} = -2$ άρα $\Delta\Gamma: y+12 = -2(x+9) \Rightarrow y = -2x - 30$