ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Α. Γνώσεις από προηγούμενες τάξεις

Α1. Κάθε εξίσωση της μορφής : $\alpha x+\beta\psi=\gamma$, παριστάνει ευθεία. Ειδικότερα, αν $\beta\neq 0$, η ευθεία μπορεί να γραφτεί στη μορφή : $\psi=-\frac{\alpha}{\beta}x+\frac{\gamma}{\beta}$ και τότε ο συντελεστής του χ (στην περίπτωσή μας η ποσότητα $-\frac{\alpha}{\beta}$) λέγεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

Αν β=0, η ευθεία μας είναι παράλληλη στον ψ΄ψ και έχει τη μορφή χ=αριθμός ενώ **αν α=0**, τότε η ευθεία είναι της μορφής y=αριθμός και είναι παράλληλη στον χ΄χ.

Δύο ευθείες είναι **παράλληλες**, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης ή αν είναι και οι δύο παράλληλες στον ένα ή τον άλλο άξονα.

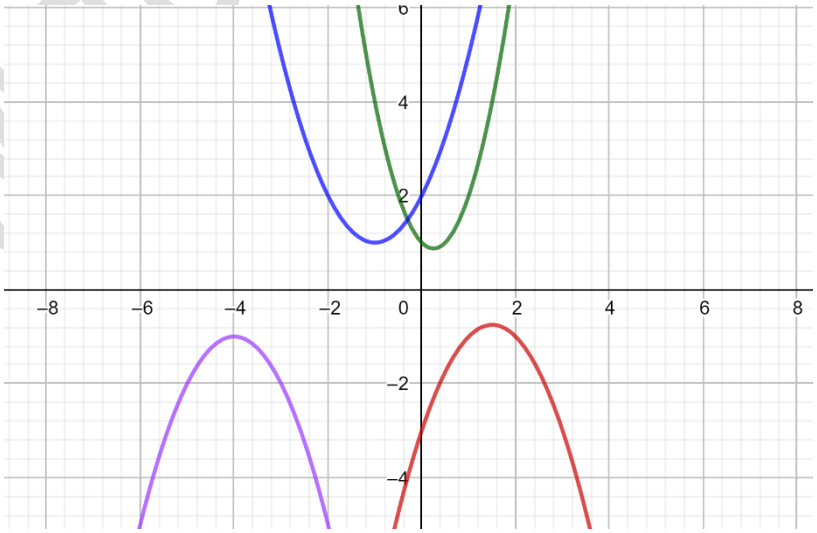
Για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας ευθείας, χρειαζόμαστε δύο σημεία της.

Για να βρούμε το σημείο τομής μιας ευθείας με χ΄χ, θέτουμε ψ=0 στον τύπο της, ενώ για το σημείο τομής της με τον ψ΄ψ, θέτουμε χ=0 στον τύπο της.

Α2. Αν ένα τριώνυμο έχει ρίζες τους x_1 , x_2 τότε μπορεί να γραφτεί σε παραγοντοποιημένη μορφή:

$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$. Αν $\Delta=0$, τότε $x_1=x_2=\rho=-\frac{\beta}{2\alpha}$, οπότε το τριώνυμο γράφεται σαν τετράγωνο διωνύμου : $\alpha(x-\rho)^2$.

Α3. Σχετικά με το πρόσημο τριωνύμου, θυμίζω ότι αν **Δ<0**, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ είναι ομόσημο του α για κάθε χ πραγματικό αριθμό και η γραφική του παράσταση (δηλαδή η παραβολή) βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον χχ΄ ή ολόκληρη κάτω από τον ψψ΄, ανάλογα με το αν α>0 ή α<0 , αντίστοιχα.

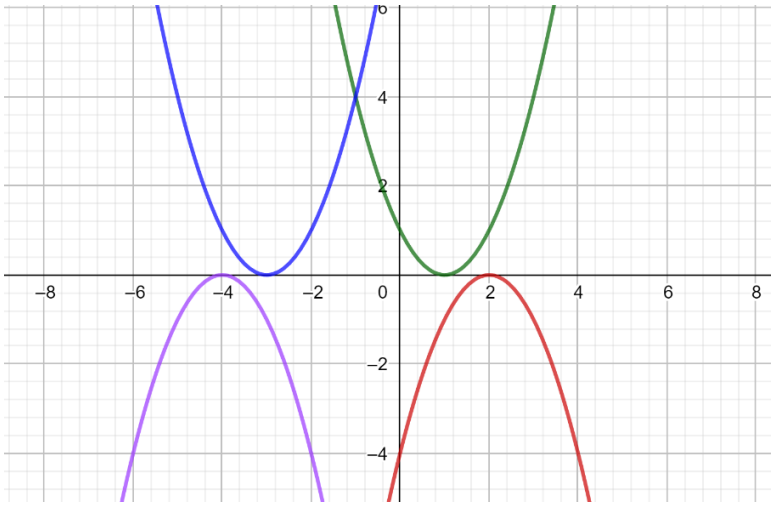


Στο διπλανό σχήμα, βρίσκονται οι γραφικές παραστάσεις των γραμμών με εξισώσεις:

$y=x^2+2x+2,\ y=-x^2-8x-17$

$y=2x^2-x+1,\ y=-x^2+3x-3.$

Αν **Δ=0**, τότε η γραφική παράσταση εφάπτεται σε ένα σημείο στον άξονα χχ΄ (στο σημείο που είναι και η κορυφή της, δηλαδή η διπλή ρίζα της) ενώ διατηρεί πρόσημο ομόσημο του α για κάθε άλλη τιμή του χ, όπως και στην πρώτη περίπτωση.



Στο διπλανό σχήμα, βρίσκονται οι γραφικές παραστάσεις των γραμμών με εξισώσεις:

$y=x^2+6x+9,\ y=-x^2+4x-4$

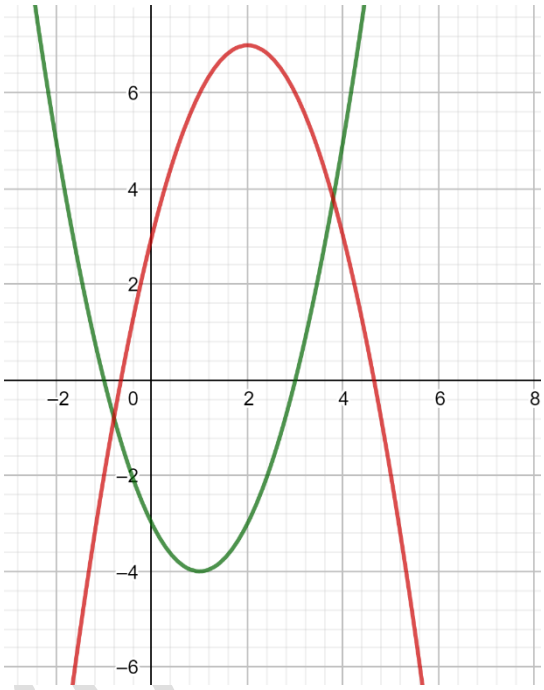
$y=x^2-2x+1,\ y=-x^2-8x-16.$

Βασίλης Μπαλούρος

Αν **Δ>0**, τότε η γραφική παράσταση τέμνει τον χχ΄ σε δύο διαφορετικά σημεία (τις ρίζες της δηλαδή) και το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για τιμές εκτός των ριζών και ετερόσημο του α για τιμές μεταξύ των ριζών. Σε αυτήν την περίπτωση, για να φανεί τα πρόσημο του τριωνύμου, κατασκευάζουμε πάντοτε άξονα στον οποίο τοποθετούμε τις ρίζες και σημειώνουμε το πρόσημο.

Στο διπλανό σχήμα, βρίσκονται οι γραφικές παραστάσεις των γραμμών με εξισώσεις:

$y = x^2 - 2x - 3,\ y = -x^2 + 4x + 3$



Α4. Μπορούμε να κατασκευάσουμε εύκολα τη γραφική παράσταση μιας παραβολής, αν θυμόμαστε ότι η κορυφή της προκύπτει για $x_o = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Αφού βρούμε την κορυφή, δίνουμε στο χ άλλες 4 τιμές εκατέρωθεν της τιμής x_o και κατασκευάζουμε την καμπύλη, έχοντας κατά νου ότι η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ είναι και άξονας συμμετρίας της παραβολής.

Β. Σχετικές θέσεις δύο γραμμών – Κύκλος – Παραβολή

Β1. Για να βρούμε αν δύο γραμμές έχουν κοινά σημεία, λύνουμε το σύστημά τους. Το πλήθος των λύσεων, καθορίζει και το πλήθος των κοινών σημείων. Συνεπώς, έχουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

Ευθεία - Ευθεία: Έχουν ένα κοινό σημείο αν τέμνονται, κανένα αν είναι παράλληλες και άπειρα αν ταυτίζονται (σε αυτήν την περίπτωση, όλα τα σημεία της μοναδικής ευθείας είναι λύση).

Ευθεία – Κύκλος: Έχουν δύο σημεία αν η ευθεία είναι τέμνουσα του κύκλου, ένα κοινό σημείο αν η ευθεία εφάπτεται στον κύκλο και κανένα αν η ευθεία είναι έξω από τον κύκλο.

Ευθεία – Παραβολή και Ευθεία - Υπερβολή: Ίδιες περιπτώσεις με το ευθεία – κύκλος.

Κύκλος – Παραβολή και Κύκλος - Υπερβολή: Μπορούν να έχουν ένα κοινό σημείο (εφαπτόμενες καμπύλες) , 2 κοινά σημεία, 3 κοινά σημεία , τέσσερα κοινά σημεία ή – τέλος – το σύστημά τους να είναι αδύνατο , δηλαδή να μην έχουν κοινό σημείο.

Β2. Οι νέες μορφές των εξισώσεων που πρέπει να γνωρίζετε είναι οι παρακάτω:

α. Κύκλος με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ (ρ>0): $x^2 + \psi^2 = \rho^2$

β. Παραβολή: $\psi = \alpha x^2,\ \ \psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$

γ. Υπερβολή: $\psi = \frac{\alpha}{x},\ \alpha \neq 0.$

Βασίλης Μπάκος

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Γ1. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α το σύστημα:

$$\begin{cases}(\alpha+1)x-(\alpha+3)y=\alpha+5\\ \alpha x-2y=\alpha+2\end{cases}$$

Γ2. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α το σύστημα:

$$\begin{cases}2x-(5-\alpha)y=6\alpha\\ \alpha x-(\alpha+1)y=\alpha+2\end{cases}$$

Γ3. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases}2x+4y-z=0\\ x+y+2z=4\\ 3x-2y+3z=1\end{cases}$ b. $\begin{cases}3x-2y+z=-3\\ 2x+y+3z=5\\ x-3y-2z=-8\end{cases}$

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α, οι παρακάτω ευθείες τέμνονται, είναι παράλληλες ή συμπίπτουν: $\begin{cases}\alpha x+y=3\\ 4x+\alpha y=-1+2\alpha\end{cases}$

Γ5. Μια ευθεία ε_1 τέμνει τον οριζόντιο άξονα στο -3 και τον κατακόρυφο στο 2, ενώ μια δεύτερη ευθεία ε_2 τέμνει τον χχ΄ στο 3 και τον ψψ΄ στο 4. Να βρείτε το σημείο τομής τους.

Γ6. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη λύση τους:

α. $\begin{cases}x^2+y^2=10\\ xy=-3\end{cases}$ β. $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ 3x-y=4\end{cases}$ γ. $\begin{cases}xy=-6\\ 2x+y=1\end{cases}$

Γ7. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α. $\begin{cases}x^2=3y+1\\ x^2+y^2=5\end{cases}$ b. $\begin{cases}x^2-1=2y\\ 2x+y=-2\end{cases}$ c. $\begin{cases}x^2+y^2-x=6\\ x^2-y^2=3\end{cases}$

Γ8. Για τις διάφορες τιμές του k , να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της ευθείας y=2x+k με την παραβολή $y=x^2+1$.

Γ9. Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της υπερβολής yx=k με την ευθεία 2x+y=k για τις διάφορες τιμές του μη μηδενικού αριθμού k.

Γ10. α. Να βρείτε το τριώνυμο του οποίου η γραφική παράσταση έχει κορυφή το σημείο Α(-1, 5) και τέμνει τον οριζόντιο άξονα στα σημεία με τετμημένες -2 και 0.

β. Να βρείτε – αν υπάρχει – τριώνυμο του οποίου η γραφική παράσταση έχει κορυφή το σημείο Β(-1,3) και τέμνει τον ψψ΄ στο σημείο 5 .

Βασίλης Μπακούρος

Δ. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Δ1. Προαπαιτούμενες γνώσεις στη διάταξη πραγματικών αριθμών.

- Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης μπορούμε να επέμβουμε με τους παρακάτω τρόπους:
  1. Αν $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \pm \gamma < \beta \pm \gamma$
  2. Αν $\alpha < \beta$ και γ θετικός τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$
  3. Αν $\alpha < \beta$ και γ αρνητικός τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\gamma > \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$
  4. Αν α,β ομόσημοι τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$
  5. Αν α,β θετικοί αριθμοί και ν φυσικός, τότε: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu} < \beta^{\nu}$
- Αν έχουμε δύο ή περισσότερες ομοιόστροφες ανισώσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη και να προκύψουν ομοιόστροφες επίσης ανισώσεις.
  Αν , επιπλέον, όλοι οι όροι των ομοιόστροφων ανισώσεων είναι θετικοί αριθμοί, τότε επιτρέπεται να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις ανισότητες.
  !!!!Δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση κατά μέλη δύο ανισοτήτων , όποιους περιορισμούς και αν βάλετε!!!!
- Επειδή ισχύει ότι :
  (οτιδήποτε)$^{2\kappa} \geq 0$, για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:
  1. Αν $\alpha^{2\kappa} \leq 0$ τότε $\alpha = 0$ 2. Αν $\alpha^{2\kappa} + \beta^{2\nu} = 0$ ή $\alpha^{2\kappa} + \beta^{2\nu} \leq 0$ τότε $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
- Αν δίνονται κάποιες ανισοτικές σχέσεις και σας ζητούν να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται κάποιες νέες ποσότητες, θυμηθείτε ότι για να σχηματίσετε την ποσότητα α-β θα πρέπει να την έχετε στο μυαλό σας ως α+(-β) , ενώ την ποσότητα $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, αφού δεν επιτρέπεται η κατά μέλη αφαίρεση ή διαίρεση ανισοτήτων.
- Συνηθίστε να μετατρέπετε τις ανισώσεις σε διαστήματα και αντίστροφα. Κλειστό διάστημα σημαίνει ότι στην ανισότητα πρέπει να υπάρχει και το «ίσον». Επίσης , πρέπει να μπορείτε να συναληθεύσετε ανισώσεις ακόμα και χωρίς τη χρήση άξονα! Σκεφτείτε ότι αν οι ανισώσεις είναι ομοιόστροφες, η μία από αυτές καλύπτει και όλες τις υπόλοιπες. Αν δεν είναι ομοιόστροφες, τότε η συναλήθευση θα οδηγεί σε διάστημα με άκρα πραγματικούς αριθμούς ή δεν θα συναληθεύουν καθόλου οι ανισώσεις.

Δ2. Αν μια συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού ένωση διαστημάτων (δηλαδή αν υπάρχουν διακεκριμένα σημεία που εξαιρούνται) τότε πρέπει να ελέγχουμε τη μονοτονία σε κάθε διάστημα ξεχωριστά.

Για να ελέγξουμε αν μια συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή, προϋπόθεση αποτελεί το πεδίο ορισμού της να είναι συμμετρικό ως προς το 0.

Αν για μια συνάρτηση f ισχύει ότι $f(x) \leq M$, $M \in \mathbb{R}$, το M δεν είναι απαραίτητα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης: Θα πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού, τέτοιο ώστε $f(x_0) = M$. Η παρατήρηση ισχύει αντίστοιχα και για την ύπαρξη ελάχιστης τιμής.

Βασίλης Μπάκουρος

Ε. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Ε1. Να ελέγξετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

α. $f(x)=x^3-|x+2|+|x-2|$ b. $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ c. $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{|x|-1}$

d. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x^2-4}$ e. $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+9}$ f. $f(x)=x^5-2x^3+1$

Ε2. Να ελέγξετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις , στο πεδίο ορισμού τους:

α. $f(x)=\dfrac{x+1}{x+3}$ b. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-3}$ c. $f(x)=x^2-4x+7$

d. $f(x)=-x^2+6x+1$ e. $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt{5-x}$ f. $f(x)=2x^3-\dfrac{3}{x}$

Ε3. Να βρείτε – αν υπάρχουν – τις θέσεις και τις τιμές των ακροτάτων των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x)=3-2|x+1|$ b. $f(x)=\sqrt{x-3}+5$ c. $f(x)=x^2+4x+9$

d. $f(x)=-x^2+6x-5$ e. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ f. $f(x)=x^4-2x^2+3$

Ε4. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x)=\dfrac{4x}{x^2+4},\quad x\in\mathbb{R}.$

α. Να δείξετε ότι η f είναι περιττή και να αποδείξετε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 και ελάχιστη το -1.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^3-4x-2)=-1$

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(3x^2-1)+f(x^2+3x-2)=2$

ΣΤ. ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΕΙΣ

Με δεδομένη τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x)=x^2$, $g(x)=|x|$, $h(x)=\sqrt{x}$ και $k(x)=\dfrac{1}{x}$

να κατασκευάσετε πρόχειρα τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με τύπους:

ΣΤ1. $f_1(x)=x^2+1,\quad f_2(x)=3-x^2,\quad f_3(x)=x^2-2x+1,\quad f_4(x)=x^2+4x+1$

ΣΤ2. $g_1(x)=|x+1|,\quad g_2(x)=|3-x|,\quad g_3(x)=|x+1|-2,\quad g_4(x)=3-|x-2|$

ΣΤ3. $h_1(x)=\sqrt{x+1},\quad h_2(x)=\sqrt{3-x},\quad h_3(x)=\sqrt{x-2}+3,\quad h_4(x)=3-\sqrt{x+2}$

ΣΤ4. $k_1(x)=\dfrac{1}{x-1},\quad k_2(x)=\dfrac{1}{x+1}-2,\quad k_3(x)=2-\dfrac{1}{x-3},\quad k_4(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$

Βασίλης Μπακούρος