ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = e^x + x^2 - 2x$, $f'(x) = e^x + 2x$ και $f''(x) = e^x + 2 > 0$,

συνεπώς η f' ↗ στο $\mathbb{R}$.

Επειδή $f'(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0$ και $f'(0) = 1 > 0$, από Θ.Β.

υπάρχει μοναδικό (f' ↗) $x_0 \in (-1, 0)$ ώστε $f'(x_0) = 0$

συνεπώς το πρόσημο της $f'(x)$ είναι:

x	-1		x_0		0	$+\infty$
f'		$-$	0	$+$		
f		↘		↗		

άρα

δηλαδή η f έχει ελάχιστο για $x = x_0$, $f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - 2x_0$.

Όμως, $f'(x_0) = 0 \Rightarrow e^{x_0} = -2x_0$ και τελικά

$f(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - 2$.

Δ2. Η f είναι γνήσια αύξουσα στο $[x_0, 0]$ άρα

$x_0 < 0 \Rightarrow f(x_0) < f(0) = -1$ δηλαδή $f(x_0) < 0$.

Βρίσκω το σύνολο τιμών της f και έχουμε:

Αν $x \in (-\infty, x_0] \Rightarrow f(x) \in [f(x_0), \lim_{x \to -\infty} f(x)) = [f(x_0), +\infty)$

και ομοίως, αν $x \in [x_0, +\infty) \Rightarrow f(x) \in [f(x_0), +\infty)$ αφού

$\lim_{x \to -\infty} (e^x + x^2 - 2x) = 0 + (+\infty) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} (e^x + x^2 - 2x)$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο αριθμούς ρίζες,

μία στο $(-\infty, x_0)$ αρνητική και μία στο $(x_0, +\infty)$, θετική

γιατί $f(0) = -1 < 0$ και f ↗ στο $(0, +\infty)$.

Δ3. Αφού το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο για την f, $f(x) > f(x_0)$

όταν $x \to x_0$, ενώ $f(x_0) - e^{x_0} = x_0^2 - 2 < 0$ αφού $x_0 \in (-1, 0)$.

Άρα το όριο είναι το $-\infty$.

Δ4. Είναι $f(ημ2x + x) > -1 \Leftrightarrow f(ημ2x + x) > f(0) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow}$

$ημ2x + x > 0 \Rightarrow ημ2x > -x$ που ισχύει για κάθε $x > 0$.