ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - COR2 - 2021

A3. Αληθής. Αν $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ και $f(x_1) = f(x_2)$ τότε αφού f παρ/μη στο διάστημα (x_1, x_2) ή (x_2, x_1), υπάρχει x_0 ώστε $f'(x_0) = 0$.

A4. Λάθος - Λάθος - Λάθος - Λάθος - Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Είναι $A_{f \circ g} = \{ x \in (0,+\infty) \text{ και } g(x) \in A_f \} = (0,+\infty)$

και $f(g(x)) = f(\ln x) = \dfrac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{2} = \dfrac{x^2-1}{2x}$

Επίσης, $h'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) > 0$ δηλαδή $h(x)$ γν. αύξουσα, συνεπώς η $h(x)$ αντ/μη.

B2. $y = \dfrac{x^2-1}{2x} \Leftrightarrow 2xy = x^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 - 2xy = 1 \Rightarrow$

$x^2 - 2xy + y^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 1 + y^2 \Leftrightarrow |x-y| = \sqrt{1+y^2}$

και επειδή $x - y = x - \dfrac{x^2-1}{2x} = \dfrac{x^2+1}{2x} > 0$ για $x > 0$, είναι

$x = y + \sqrt{y^2+1}$, συνεπώς $h^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, $A = \mathbb{R}$.

Επειδή η $h(x)$ ↑, τα κοινά σημεία της με την $h^{-1}(x)$ θα βρίσκονται πάνω στην $y = x$ άρα $h(x) = h^{-1}(x) \Leftrightarrow$

$\dfrac{x^2-1}{2x} = x \Leftrightarrow x^2 = -1$, αδύνατο, άρα η C_h δεν τέμνει την $h^{-1}(x)$.

B3. $h^{-1}\left(\ln x - \frac{1}{x} + 1\right) \leq 1 \overset{h \uparrow}{\Leftrightarrow} \ln x - \frac{1}{x} + 1 \leq 0$. (1)

Έστω $T(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$, $T(1) = 0$ και $T'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για $x > 0$. Άρα η (1) γίνεται $T(x) \leq T(1) \Leftrightarrow x \leq 1$

συνεπώς $x \in (0, 1]$.