ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ – COR2 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_o) \cup (x_o, \beta)$, τότε η f(x) είναι γνήσια μονότονη στο (α, β) και δεν έχει ακρότατο στο σημείο x_0.

(7 μονάδες)

Α2. Να διατυπώσετε και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

(1+3 μονάδες)

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ στο οποίο η συνάρτηση δέχεται οριζόντια εφαπτομένη». Να γράψετε αν είναι «Αληθής» ή «Ψευδής» και να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(1+3 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Αν για μια συνάρτηση f , ορισμένη στο [α, β] ισχύει ότι $f(\alpha)f(\beta)<0$, τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

β. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία με μια ασύμπτωτη της.

γ. Τα κοινά σημεία μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης με την αντίστροφή της, βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x.

δ. Μια συνάρτηση που έχει σημείο καμπής σε ένα σημείο της ξ, είναι παραγωγίσιμη στο ξ.

ε. Ο κανόνας DLH μπορεί να εφαρμοστεί και σε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{\infty}{0}$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g με τύπους: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

Β1. Να βρείτε την συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x)$ και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη.

(5+3 μονάδες)

Έστω ότι $h(x) = \frac{x^2 - 1}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$.

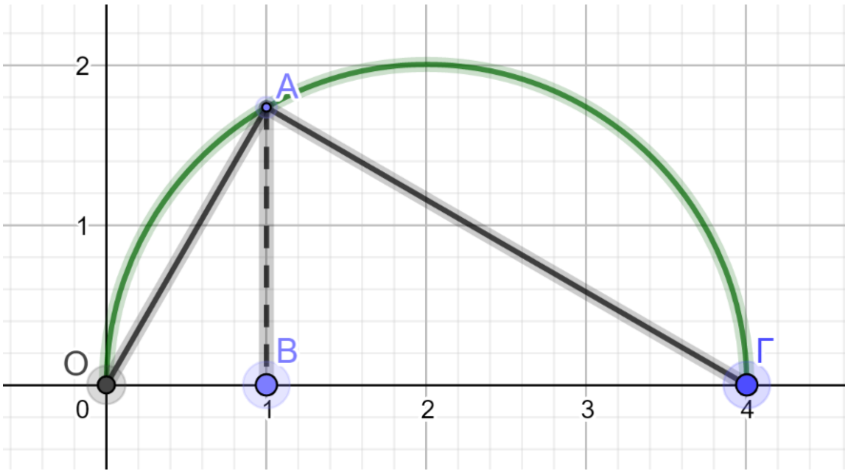
Β2. Να βρείτε την αντίστροφη της και να αποδείξετε ότι δεν έχει κοινά σημεία με την h(x).

(5+3 μονάδες)

Β3. Να λύσετε την ανίσωση: $h^{-1}\left(\ln x - \frac{1}{x} + 1\right) \le 1$ **(9 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Το σημείο $A(x,f(x))$ κινείται πάνω σε αυτήν έχοντας ξεκινήσει από το $O(0,0)$, ενώ η προβολή του Β στον xx' απομακρύνεται από το Ο με ταχύτητα $0{,}25\,m/s$.



Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δίνεται από τον τύπο: $f(x)=\sqrt{4x-x^2}, \quad x\in[0,4]$.
(3 μονάδες)

Γ2. Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x, το εμβαδόν της επιφάνειας E(x) που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ΟΑΓ και εσωτερικά του ημικυκλίου και να βρείτε το x ώστε το εμβαδόν αυτό να γίνεται ελάχιστο. **(3+5 μονάδες)**

Γ3. Αν ονομάσουμε $\varphi(t)$ τη γωνία $\widehat{ΓΟΑ}$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας φ τη χρονική στιγμή t_o κατά την οποία $x(t_o)=1$. **(7 μονάδες)**

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς χρονικές στιγμές κατά τις οποίες το εμβαδόν της επιφάνειας Ε γίνεται ίσο με (π) m^2. **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=e^x+x^2-2,\ x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(-1,0)$, στο οποίο η συνάρτηση f να παρουσιάζει ελάχιστο την τιμή $f(x_o)=x_o^2-2x_o-2$. **(6 μονάδες)**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f(x) έχει ακριβώς δύο ετερόσημες ρίζες. **(8 μονάδες)**

Δ3. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x_o)-e^x}{f(x)-f(x_o)}$ **(5 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι: $f(ημ2x+x)>-1$ για κάθε $x>0$. **(6 μονάδες)**