

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΕ ΚΥΚΛΟ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση κύκλου ο οποίος τέμνει τον $x\chi'$ στα σημεία $A(2,0)$ και $B(4,0)$, έχει ακτίνα ίση με $\sqrt{5}$ και έχει το κέντρο του στο 1^ο τεταρτημόριο είναι η: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$ (C1)
- A2.** Να δείξετε ότι το σημείο $\Gamma(7,4)$ είναι εξωτερικό σημείο του C1 και να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του C1 ώστε η απόστασή τους από το Γ να παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή τους.
- A3.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου C2, ο οποίος να εφάπτεται εξωτερικά στον C1 και να έχει κέντρο το Γ .
- A4.** Να βρείτε την εφαπτομένη του C1 στο σημείο του B και να ελέγξετε αν αυτή εφάπτεται και στον C2.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + (6-4a)x + 2ay + 5a^2 - 13a + 11 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να περιορίσετε κατάλληλα την τιμή της παραμέτρου a , ώστε η γραμμή C να παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
- B2.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων της γραμμής C.
- B3.** Να βρείτε - αν υπάρχει - τιμή του a για την οποία η ευθεία με εξίσωση $x - y - 7 = 0$ εφάπτεται σε κύκλο της οικογένειας.
- B4.** Για $a=4$, να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη απόσταση που μπορεί να έχει σημείο του κύκλου από το $(0,0)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 + 2\lambda x - \lambda y - 5 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει κύκλο για κάθε λ πραγματικό και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
- Γ2.** Να δείξετε ότι οι κύκλοι που περιγράφει η παραπάνω εξίσωση διέρχονται από δύο σταθερά σημεία τα οποία και να βρείτε.
- Γ3.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων καθώς και την κοινή χορδή των κύκλων.
- Γ4.** Να βρείτε τους δύο κύκλους της οικογένειας οι οποίοι έχουν εφαπτομένη την ευθεία με εξίσωση $x = \frac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η εξίσωση $(x-1)^2 + (y+3)^2 + \lambda(3x+y-10) - 20 = 0$ (1)

- Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- Δ2.** Να δείξετε ότι όλοι οι κύκλοι της παραπάνω εξίσωσης, έχουν μια κοινή χορδή AB, της οποίας να βρείτε το μήκος της.
- Δ3.** Αν τα κέντρα των κύκλων της εξίσωσης (1) βρίσκονται πάνω στην ευθεία $y = -2x - 8$ να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ και την εφαπτομένη του αντίστοιχου κύκλου που είναι παράλληλη της $y = -2x - 8$.

ΘΕΜΑ Ε

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + (a-4)x + ay + 8 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

Ε1. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε η C να παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Ε2. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σταθερό σημείο από το οποίο να διέρχεται η οικογένεια των κύκλων.
Έστω ότι $a=6$.

Ε3. Να δείξετε ότι η διχοτόμος $1^{\text{ου}}$ - $3^{\text{ου}}$ τεταρτημόριου είναι εφαπτομένη του κύκλου C .

Ε4. Να βρείτε το μήκος της χορδής που αποκόπτει ο κύκλος C από την ευθεία με εξίσωση: $x - y - 1 = 0$.