

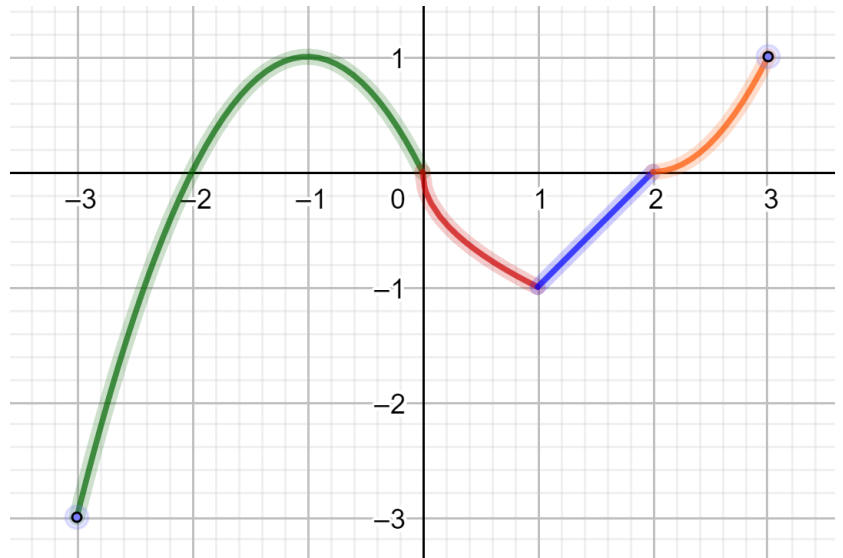
## ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ COR1 - 2021 ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

### ΘΕΜΑ Α

- A1.** Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  ; **(3 μονάδες)**
- A2.** Να αποδείξετε ότι μια συνάρτηση ορισμένη και συνεχής στο  $[a, \beta]$  για την οποία υπάρχει σημείο  $x_0$  στο  $(a, \beta)$  ώστε  $f'(x) < 0$  στο  $(a, x_0)$  και  $f'(x) > 0$  στο  $(x_0, \beta)$ , έχει τοπικό ελάχιστο στο  $x_0$ . **(8 μονάδες)**
- A3.** Δίνεται ο ισχυρισμός: «Μια συνάρτηση συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , που έχει σημείο καμπής στο  $x_0$ , μπορεί να εμφανίζει και τοπικό ακρότατο στο ίδιο σημείο». Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον παραπάνω ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. **(1+3 μονάδες)**
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς ως «Σωστό» ή «Λάθος».
- Μια συνάρτηση συνεχής και γνήσια αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , δεν έχει ακρότατα.
  - Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , δεν μπορεί να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.
  - Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς σε ένα διάστημα συνάρτησης  $f$  είναι επίσης διάστημα.
  - Τα κοινά σημεία μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης με την αντίστροφή της, βρίσκονται πάντα πάνω στην ευθεία  $y=x$ .
  - Μια συνεχής συνάρτηση η οποία διατηρεί πρόσημο, δεν μπορεί να έχει σημείο καμπής. **(10 μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Β

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου  $f'$  μιας συνάρτησης  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $[-3, 3]$ .



**B1.** Να βρείτε τις θέσεις και το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης  $f$ .

**(5 μονάδες)**

**B2.** Να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής της συνάρτησης  $f$ . **(5 μονάδες)**

**B3.** Να δείξετε ότι υπάρχει σημείο στο  $(-1, 0)$ , στο οποίο η εφαπτομένη της συνάρτησης  $f'$  να είναι παράλληλη της  $y=-x$ . **(7 μονάδες)**.

**B4.** Να βρείτε τον τύπο της  $f(x)$  για  $x \in [1, 2]$ , αν γνωρίζετε ότι  $f(1)=1/2$ . **(8 μονάδες)**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = ax \ln x - e^{x-1}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , για την οποία γνωρίζουμε ότι δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο  $x_0 = 1$ .

- Γ1.** Να δείξετε ότι  $a=1$  και να βρείτε την εφαπτομένη της στο σημείο  $x_0$ . **(5 μονάδες)**
- Γ2.** Να βρείτε την κυρτότητα της  $f$  και τα σημεία καμπής της - αν υπάρχουν. **(6 μονάδες)**
- Γ3.** Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης  $f(x)+2021=0$ . **(8 μονάδες)**
- Γ4.** Να λύσετε την ανίσωση:  $\ln x \cdot \ln(\ln x) < -1 + \frac{x}{e}$ ,  $x \in (1, +\infty)$ . **(6 μονάδες)**

## ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο  $h(x) = \ln x + 2x - 3$ ,  $x \in (0, +\infty)$  έχει μοναδική ρίζα  $\rho$  στο διάστημα  $(1,2)$  και με τη βοήθεια αυτής, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = 2\ln x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} - 3$  έχει δύο ακριβώς ρίζες.

**(3+7 μονάδες)**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .

**Δ2.** Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα - αν υπάρχουν - της συνάρτησης  $f$  και να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση  $f(x) = x - \ln x + 1$  είναι αδύνατη. **(7 μονάδες)**

**Δ3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**(8 μονάδες)**