ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ COR-1-2021

Α3. Αν η f έχει ακρότατο στο x_0 και σημείο καμπής στο ίδιο x_0, τότε από Θ.F, είναι $f''(x_0) = f'(x_0) = 0$.

Αφού η f έχει σημείο καμπής στο x_0, θα είναι – ας πούμε – $f' \searrow$ για $x < x_0$ και $f' \nearrow$ για $x > x_0$ δηλαδή

$f'(x) > 0$ και $f'(x) > 0$ για κάθε x σε περιοχή του x_0

συνεπώς η f' διατηρεί πρόσημο γύρω από το x_0, άρα η f δεν μπορεί να έχει ακρότατο στο x_0. Συνεπώς, ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

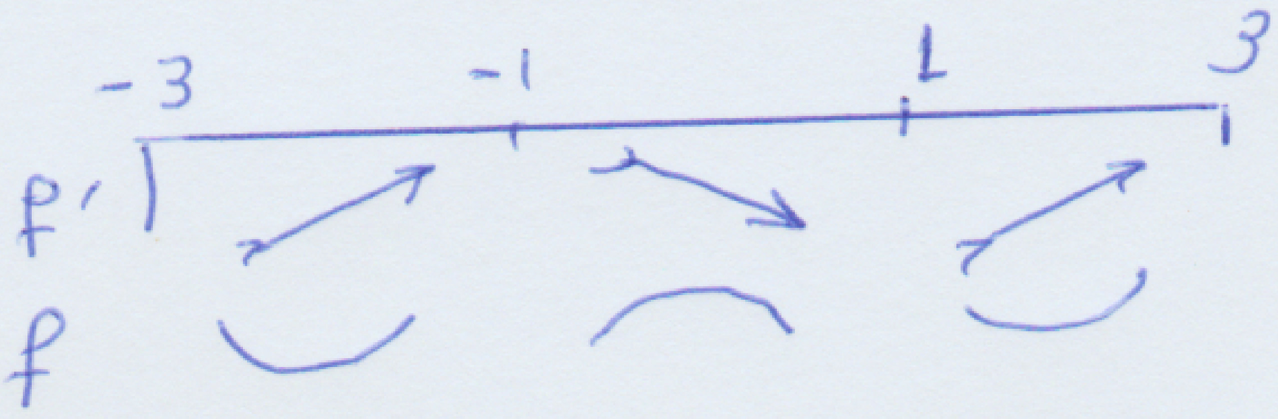
Α4. Σ – Λ – Λ – Λ – Λ

Β1. Με βάση το σχήμα:

x	-3		-2		0		2		3
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f παρουσιάζει τοπ. ελάχιστο για $x = -2$ και $x = 2$ και τοπικό μέγιστο για $x = -3$, $x = 0$, $x = 3$.

Β2. Επίσης, με βάση το σχήμα:



η f έχει σημεία καμπής για $x = -1$ και $x = 1$

Β3. Η f' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$, παραγωγίσιμη στο $(-1, 0)$ άρα (ΘΜΤ) υπάρχει $\xi \in (-1, 0)$ ώστε $f''(\xi) = \dfrac{f'(0) - f'(1)}{0-(-1)} = -1$ δηλ. η εφαπτομένη της $C_{f'}$ στο $x = \xi$ είναι παράλληλη στη $y = -x$

Β4. Η $f'(x)$ είναι ευθ. τμήμα πάνω στην ευθεία που περνά από τα $(1, -1)$ και $(2, 0)$ με $\lambda = \dfrac{1}{2-1} = 1$ δηλ. έχει εξίσωση $y = x - 2$ άρα $f'(x) = x - 2 \Rightarrow f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + c$

και για $x = 1$, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - 2 + c \Rightarrow c = 2$ δηλ. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2$ για $x \in [1, 2]$.

Γ1. Αφού η f έχει οριζόντια εφ/νη στο $x_0=1$, πρέπει $f'(1)=0$. Είναι $f'(x) = \alpha \ln x + \alpha - e^{x-1}$ συνεπώς ζητώ $f'(1)=0 \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1$. Δηλαδή $f(x) = x\ln x - e^{x-1}$ με $f(1) = -1$ και άρα η εφ/νη της C_f στο $x_0=1$ είναι η $y=-1$

Γ2. $f'(x) = \ln x + 1 - e^{x-1}$ με $f'(1)=0$ και $f''(x) = \frac{1}{x} - e^{x-1}$ με $f''(1)=0$. Επειδή $f^{(3)}(x) = -\frac{1}{x^2} - e^{x-1} < 0$, η $f'' \searrow$ συνεπώς:

x	0		1	
f''		$+$	0	$-$
f'		$\nearrow$		$\searrow$

δηλ. η $f'(x)$ έχει μέγιστο για $x=1$, $f'(1)=0$.

Δηλαδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$, $x \neq 1$.

Επίσης η f έχει σημείο καμπής για $x=1$, $f(1) = -1$.

Γ3. Βρίσκω το σύνολο τιμών της f η οποία είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0,+\infty)$ με $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x - e^{x-1}) = -\frac{1}{e}$

(αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{DLH}{=} \dots = 0$) και $\lim\limits_{x\to +\infty}(x\ln x - e^{x-1}) = -\infty$

(αφού: $\lim\limits_{x\to +\infty}(x\ln x - e^{x-1}) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-1}\left(\frac{x\ln x}{e^{x-1}} - 1\right) = -\infty$ επειδή

και $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x\ln x}{e^{x-1}} \overset{DLH}{=} \lim \frac{\ln x + 1}{e^{x-1}} \overset{DLH}{=} \lim \frac{1}{xe^{x-1}} = 0$)

Άρα το σύνολο τιμών της $f = (-\infty, -1/e)$ και συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = -2021$ έχει μοναδική λύση αφού το $(-2021) \in (-\infty, 0)$ και η f συνεχής και γν. φθίν.

Γ4. $\ln x \cdot \ln(\ln x) - \frac{x}{e} < -1 \Rightarrow f(\ln x) < f(1) \overset{f \searrow}{\Rightarrow}$

$\ln x > 1 \Rightarrow x > e$, δηλαδή $x \in (e,+\infty)$.

Δ1. Είναι $h(1) = -1 < 0$ και $h(2) = \ln 2 + 1 > 0$ και αφού $h(x)$ συνεχής στο $[1, 2]$, από Θ.B. υπάρχει $\rho \in (1, 2)$ ώστε $h(\rho) = 0$, μοναδικό γιατί $h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$ δηλ. $h \uparrow$ στο $(0, +\infty)$.

Το πρόσημο της $h(x)$

x	0		ρ		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	

Είναι $g(x) = 2\ln x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} - 3$, $x \in (0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$\Rightarrow g'(x) = \frac{2x - 3 + \ln x}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}$, συνεπώς:

x	0		ρ		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

Βρίσκω την ελάχιστη τιμή της g. $g(\rho) = 2\ln\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{\ln\rho}{\rho} - 3$.
όπου όμως απ' την σχέση $h(\rho) = 0$, $\ln\rho = 3 - 2\rho$ άρα

$$g(\rho) = 6 - 4\rho + \frac{2}{\rho} - \frac{3 - 2\rho}{\rho} - 3 = 3 - 4\rho + \frac{2\rho - 1}{\rho} = \frac{3\rho - 4\rho^2 + 2\rho - 1}{\rho}$$

$$= \frac{-4\rho^2 + 5\rho - 1}{\rho} = \underbrace{\frac{-4(\rho - 1)(\rho - 1/4)}{\rho}}_{m} < 0 \text{ αφού } 1 < \rho < 2.$$

Επίσης, $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2\ln x + \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x} - 3\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x}(2x\ln x + 2 - \ln x - 3x)$

άρα $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Συνεπώς, αν $x \in \Delta_1 = (0, \rho] \Rightarrow g(x) \in [m, +\infty)$
$x \in \Delta_2 = [\rho, +\infty) \Rightarrow g(x) \in [m, +\infty)$ άρα, αφού το $0 \in g(\Delta_1)$
και το $0 \in g(\Delta_2)$, υπάρχουν δύο τιμές αριθμών x_1, x_2 ώστε
$g(x_1) = g(x_2) = 0$ και το πρόσημο της $g(x)$ διαμορφώνεται ως εξής:

x	0		x_1		ρ		x_2	
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$

Δ2. $f(x) = \frac{x}{x - \ln x}$, $f'(x) = \frac{x - \ln x - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$		$\searrow$	

άρα η f έχει μέγιστο για $x = e$, $f(e) = \frac{e}{e-1}$, δηλαδή $f(x) \le \frac{e}{e-1}$.

Γνωρίζουμε ότι $\ln x \le x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty) \Rightarrow 0 \le -\ln x + x - 1$
$\Rightarrow x - \ln x + 1 \ge 2$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = x - \ln x + 1$
είναι αδύνατη αφού $f(x) \le \frac{e}{e-1} < 2 \le x - \ln x + 1$.

Δ3. Η $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$, άρα η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη

με $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}(x-\ln x)^2 - 2(x-\ln x)\left(1-\frac{1}{x}\right)(1-\ln x)}{(x-\ln x)^4} \Rightarrow$

$$f''(x) = \frac{(x-\ln x)\left(-1+\frac{\ln x}{x} - 2 + 2\ln x + \frac{2}{x} - \frac{2\ln x}{x}\right)}{(x-\ln x)^4}$$

$\Rightarrow f''(x) = \dfrac{g(x)}{(x-\ln x)^3}$ όπου $g(x)$ η συνάρτηση του Δ1 και

αφού $(x-\ln x)^3 > 0$, το πρόσημο της $f''(x)$ είναι το ίδιο με το πρόσημο της $g(x)$, συνεπώς:

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	+	0	−	0	+	
$f(x)$		∪		∩		∪	

δηλαδή η $f(x)$ έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής x_1, x_2.