Διαγώνισμα Κατεύθυνσης Γ (COR1 - 2021)

ΘΕΜΑ Α: Α1: Λάθος - Λάθος - Λάθος - Σωστό - Σωστό

Α2: α) Σωστό β) Λάθος. Αν $\alpha \in (0,1]$ η εξίσωση έχει τρεις ρίζες

γ) Λάθος, γιατί $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ δ) Λάθος, γιατί δεν υπάρχουν ετερόσημες τιμές της στο $\mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.

Α3: α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό

ΘΕΜΑ Β: Β1. Αφού f συνεχής στα $[1,3]$, $[3,5]$ και ισχύει ότι $f(1)f(3)<0$, $f(3)f(5)<0$, από Θ. Bolzano, υπάρχουν δύο τουλάχιστον $x_1 \in (1,3)$ και $x_2 \in (3,5)$ ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.
Ακριβώς για αυτό, δηλ. ότι υπάρχουν x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$ ενώ $f(x_1) = f(x_2)$, η f δεν είναι 1-1.

Β2. Η τιμή $\eta = \frac{2020}{2021}$ είναι μεταξύ των $f(1)$, $f(3)$, συνεπώς, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (1,3)$ ώστε $f(x_0) = \eta$.

Β3. Αφού $1<3$ και $f(1)>f(3)$ η $f \searrow$ στο $(1,3)$ και εφόσον $3<5$ και $f(3)<f(5)$ η $f \nearrow$ στο $(3,5)$. Άρα:
Αν $x \in [1,3] \xrightarrow{f \searrow} f(x) \in [-2,4] = \Delta_1$ ενώ αν
$x \in [3,5] \xrightarrow{f \nearrow} f(x) \in [-2,3] = \Delta_2$, συνεπώς σύνολο τιμών της f είναι το $[-2,4]$.
Η εξίσωση $f(x) = \alpha$ με $3<\alpha<4$, έχει ακριβώς μία λύση γιατί το $\alpha \in \Delta_1$ ενώ $\alpha \notin \Delta_2$, συνεπώς από Θ.Ε.Τ υπάρχει $\rho \in (1,3)$ ώστε $f(\rho) = \alpha$, μοναδικό γιατί $f \searrow$ στο $(1,3)$

B4. Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$.

Η $g(x)$ συνεχής στο $[1, x_0]$ με $g(1) = f(1) - 1 = 3 > 0$ και

$g(x_0) = f(x_0) - x_0 = \frac{2020}{2021} - x_0$ που είναι αρνητική γιατί $x_0 \in (1, 3)$

συνεπώς $x_0 > 1$. Άρα, από Θ.Β., υπάρχει $x_1 \in (1, x_0)$ ώστε

$g(x_1) = 0$. Επίσης το x_1 είναι μοναδικό, γιατί η $g \searrow$

στο $[1, x_0]$ εφόσον: αν $x_2 < x_3 \overset{f \searrow}{\Longrightarrow} f(x_2) > f(x_3)$
και $-x_2 > -x_3$ $\Big\}$ $(+)$

$\Rightarrow g(x_2) > g(x_3)$ δηλ. $g \searrow$ στο $[1, x_0]$.

B5. Έστω $h(x) = e^x + 2x$. Η $h(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $[1, 5]$

άρα το σύνολο τιμών της είναι το $[h(1), h(5)] = [e+2, e^5+10]$.

άρα $h(x) \geq e+2$ ενώ η $f(x) \leq 4$ δηλ.

$f(x) \leq 4 < e+2 \leq h(x)$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $g^2(x) - 2x\, g(x) + x^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow (g(x) - x)^2 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow |g(x) - x| = \frac{1}{|x|}$.

Έστω $h(x) = g(x) - x$. Επειδή $\frac{1}{x} \neq 0$, η $h(x)$ είναι συνεχής

και διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

Για $x > 0$, $h(1) = g(1) - 1 = 1 > 0$ άρα $h(x) > 0$ δηλαδή $g(x) - x = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$g(x) = x + \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$.

Για $x < 0$, $h(-1) = 0 + 1 = 1 > 0$ άρα $h(x) > 0$ δηλ. $g(x) - x = -\frac{1}{x} \Rightarrow$

$g(x) = x - \frac{1}{x}$ για κάθε $x < 0$.

Τελικά, $g(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x + \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

Γ2. Έστω $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$ άρα

$\ln x_1 + x_1 - 1 < \ln x_2 + x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ δηλ. $f \uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, το σύνολο τιμών

της f είναι το $\mathbb{R}$. Συνεπώς, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει

μία ακριβώς ρίζα στο $(0,+\infty)$, μοναδική γιατί $f \uparrow$.

Γ3. Αρκεί νδο η εξίσωση $x + \ln x - 1 = x + \frac{1}{x}$ έχει ρίζα στο $(0,+\infty)$.

Έστω $T(x) = \ln x - \frac{1}{x} - 1$, $x \in (0,+\infty)$.

Αν $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$, ενώ $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$ άρα

$T(x_1) < T(x_2)$ δηλ. $T \uparrow$ στο $(0,+\infty)$.

Επειδή το $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} T(x) = +\infty$, το σύνολο

τιμών της T είναι το $\mathbb{R}$ και αφού το $0 \in \mathbb{R}$, από Θ.Ε.Τ.

υπάρχει $\rho \in (0,+\infty)$ ώστε $T(\rho) = 0$, μοναδικό αφού $T \uparrow$,

συνεπώς οι C_f, C_g τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο.