ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ (COR1-2021)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α. Αν η f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα, τότε το σύνολο τιμών της είναι επίσης διάστημα.

β. Αν για μια συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα [α, β] γνωρίζουμε ότι f(α)f(β)<0, τότε η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και υπάρχουν δύο αριθμοί α, β με α<β για τους οποίους ισχύει ότι f(α)f(β)>0, τότε η συνάρτηση δεν έχει ρίζα στο (α, β).

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [1, 3] με f(1)<2<f(3), τότε η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία y=2 σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο R, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε διάστημα [α, β].

(Μονάδες 10)

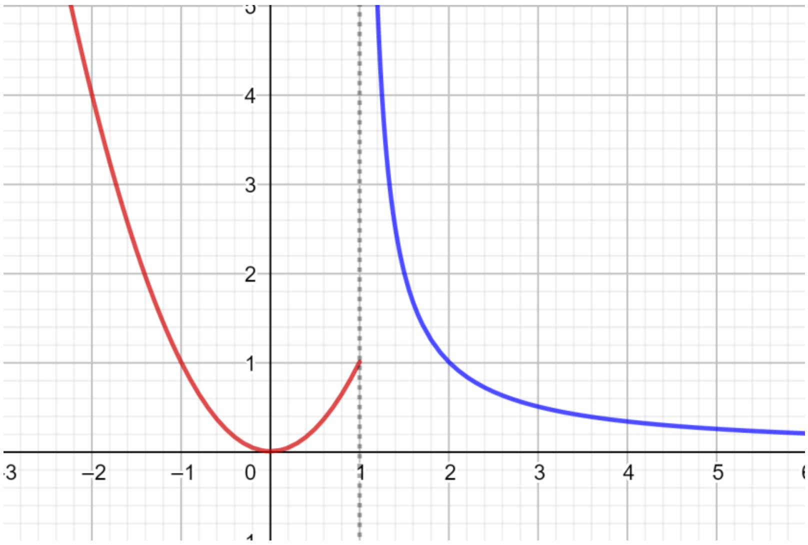
Α2. Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f που βλέπετε στο διπλανό σχήμα, δίνονται οι παρακάτω ισχυρισμοί:

α. «Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-2,1]»

β. «η εξίσωση f(x)=α, α>0 έχει το πολύ δύο ρίζες για κάθε α>0»

γ. «Το $\lim_{x\to 1} f(x)=1$»

δ. «Το θεώρημα Bolzano έχει εφαρμογή για τη συνάρτηση f στο διάστημα [-2,1]»



Να χαρακτηρίσετε κάθε έναν ως «Σωστό» ή «Λάθος», δικαιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 4+8=12)

Α3. Αν για μια συνάρτηση f γνωρίζετε ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

a. $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3}{f(x)}=0$ b. $\lim_{x\to+\infty}(2-x)f(x)=-\infty$ c. $\lim_{x\to+\infty} f(x+2)=-\infty$ d. $\lim_{x\to+\infty}(\eta\mu x-2)f(x)=+\infty$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β

Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο [1,5] για την οποία γνωρίζουμε ότι: $f(1)=4$, $f(3)=-2$ και $f(5)=3$.

Β1. Να αποδείξετε ότι έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (1,5) και να δικαιολογήσετε ότι δεν είναι 1-1 στο διάστημα αυτό. **(5 μονάδες)**

Β2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_o\in(1,3)$ ώστε $f(x_o)=\dfrac{2020}{2021}$. **(5 μονάδες)**

Β3. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η f είναι γνήσια μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα (1, 3) και (3, 5), να βρείτε το είδος της μονοτονίας της σε κάθε διάστημα **(2 μονάδες)** το σύνολο τιμών της **(2 μονάδες)** και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)=α, με 3<α<4. **(4 μονάδες)**

Β4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει σε ένα ακριβώς σημείο x_1 , με $x_1<x_o$,

την ευθεία με εξίσωση y=x. **(10 μονάδες)**

Β5. Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x)=e^x+2x$ είναι αδύνατη στο [1, 5]. **(12 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}^*$ συνάρτηση $g(x)$ καθώς και η $f(x)$ για τις οποίες γνωρίζουμε ότι:

$$g^2(x)+x^2=\frac{1}{x^2}+2xg(x),\ x\neq 0,\ \text{με}\ g(1)=2\ \text{και}\ g(-1)=0\ \text{και η}\ f(x)=x+\ln x-1,\ x>0.$$

Γ1. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$. **(12 μονάδες)**

Γ2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=α, α>0, έχει ακριβώς μια ρίζα για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό α. **(8 μονάδες)**

Έστω $g(x)=x+\frac{1}{x},\ x>0.$

Γ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο. **(10 μονάδες).**