

$$\textcircled{10} \text{ α) Είναι } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{a} + 2\vec{b}|} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b}}{2|\vec{a}|^2} \Rightarrow$$

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \text{ άρα } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

$$\beta) \text{ Από την ισότητα } |\vec{a} + 2\vec{b}| = 2|\vec{a}| \text{ έχουμε:}$$

$$\vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 + 4\vec{a}\vec{b} = 4\vec{a}^2 \Rightarrow 4\vec{b}^2 = 3\vec{a}^2 \Rightarrow |\vec{b}|^2 = \frac{3}{4}|\vec{a}|^2$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}|.$$

$$\gamma) \vec{a}(4\vec{c} - \vec{a}) = 4\vec{b}^2 + \vec{c}^2 \Rightarrow 4\vec{a}\vec{c} - \vec{a}^2 = 3|\vec{a}|^2 + \vec{c}^2$$

$$\Rightarrow 4|\vec{a}|^2 - 4\vec{a}\vec{c} + \vec{c}^2 = 0 \Rightarrow (2\vec{a} - \vec{c})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$|2\vec{a} - \vec{c}| = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a} - \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{c} = 2\vec{a}.$$

$\textcircled{11}$  α) Υψώνω την δοσμένη ισότητα στο τετράγωνο.

Για συντομία,  $k = |\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $m = |\vec{a} - \vec{b}|$  δε τιμοί πραγματικοί.

$$\text{Άρα } m^2 + k^2 + 2mk = 36 \Rightarrow$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2mk = 36 \Rightarrow$$

$$18 + 2mk = 36 \Rightarrow mk = 9 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a} - \vec{b}| = 9.$$

γ, β) Είναι  $m + k = 6$ ,  $m \cdot k = 9 \Rightarrow$  τα  $m, k$  λύσεις

της  $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$  άρα  $m = k = 3$ ,

Συνεπώς η σχέση  $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 9 \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 - 2\vec{a}\vec{b} = 9$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 - 9 = 2\vec{a}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$