

$$\textcircled{7} \quad \alpha) \quad \vec{OA} + 2\vec{OB} - 3\vec{OG} = \vec{0} \Rightarrow \vec{OA} - \vec{OG} + 2(\vec{OB} - \vec{OG}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{GA} + 2\vec{GB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} = 2\vec{GB}$$

$$\beta) \quad \begin{array}{c} A \quad \quad \quad G \quad \quad \quad B \\ \hline \end{array} \quad \text{δηλ.} \quad \vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}, \quad \vec{GB} = \frac{1}{3}\vec{AB}$$

$$\gamma) \quad \text{Αρα ει} \sqrt{5} \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0. \quad \text{Είνα} \quad \vec{OA} + 2\vec{OB} = 3\vec{OG} \quad \text{όρα}$$

$$\vec{OA}^2 + 4\vec{OB}^2 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 9\vec{OG}^2 \Rightarrow 1 + 4 + 4\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 9 \cdot \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0.$$

$$\delta) \quad \cos(\vec{OA}, \vec{OG}) = \frac{\vec{OG} \cdot \vec{OA}}{|\vec{OG}| \cdot |\vec{OA}|} < 90^\circ \Leftrightarrow \vec{OG} \cdot \vec{OA} > 0.$$

$$\text{Πράγματι,} \quad \vec{OA} - 3\vec{OG} = -2\vec{OB} \quad \text{όρα} \quad \vec{OA}^2 + 9\vec{OG}^2 - 6\vec{OA} \cdot \vec{OG} = 4\vec{OB}^2$$

$$\Rightarrow 1 + 5 - 6\vec{OA} \cdot \vec{OG} = 4 \Rightarrow \vec{OA} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{3} \quad \text{όρα} \quad \varphi < 90^\circ.$$

$$\textcircled{8} \quad \text{Είνα} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{a}^2 - 3\vec{b}^2 = 0 \Rightarrow \vec{a}^2 = 3\vec{b}^2 \quad \text{και} \quad |\vec{a} - \vec{b}| = 2 \Rightarrow$$

$$\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 4 \Rightarrow 4|\vec{b}|^2 = 4$$

$$\Rightarrow |\vec{b}| = 1 \quad \text{και} \quad |\vec{a}|^2 = 3 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3}.$$

$$\textcircled{9} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AG} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \quad \text{και} \quad \cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}|}$$

$$\text{Επίνα} \quad \vec{AM} = \frac{\vec{AB} + \vec{AG}}{2} \Rightarrow 4\vec{AM}^2 = 3 + 4 + 2 \cdot 3 \Rightarrow |\vec{AM}| = \frac{\sqrt{39}}{2}$$

$$\text{Ενω} \quad \vec{AB} \cdot \vec{AM} = \frac{\vec{AB}^2 + \vec{AB} \cdot \vec{AG}}{2} = \frac{3 + 3}{2} = 3$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AM}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AM}|} = \frac{3}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{39}}{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{39}}{39} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$