

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΟ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

① α. Είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ αφού $\vec{a} \perp \vec{b}$. $|\vec{v}| = |2\vec{b} + 4\vec{a}|$ άρα

$$|\vec{v}|^2 = (2\vec{b} + 4\vec{a})^2 = 4\vec{b}^2 + 16\vec{a}^2 + 16\vec{a} \cdot \vec{b} = 32 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

β. $\cos \varphi = \frac{\vec{b} \cdot \vec{v}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{4\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2}{2 \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varphi = 45^\circ$

② α. Είναι $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{\gamma}^2 \Rightarrow$

$$9 + 25 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 49 \Rightarrow 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 15 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = \frac{15}{2} \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \text{ άρα } \theta = 60^\circ.$$

β) Είναι $\vec{a} + \vec{\gamma} = -\vec{b} \Rightarrow \vec{a}^2 + \vec{\gamma}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{\gamma} = \vec{b}^2 \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{\gamma} = -\frac{33}{2}$

και ομοίως $\vec{b} \cdot \vec{\gamma} = -\frac{65}{2}$

$$\text{άρα } j = \frac{15}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{65}{2}\right) + 3 \cdot \left(-\frac{33}{2}\right) = -107$$

④ Έστω $\vec{x} = (x, \psi)$. $\vec{a} \cdot \vec{x} = 3 \Rightarrow -x + 2\psi = 3$ και

$$\begin{vmatrix} x & \psi \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3x - 4\psi = 0 \xrightarrow{x=2\psi-3} -6\psi + 9 - 4\psi = 0$$

$$\Rightarrow \psi = \frac{9}{10}, \quad x = -\frac{6}{5} \text{ άρα } \vec{x} = \left(-\frac{6}{5}, \frac{9}{10}\right)$$

③ Είναι $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$ και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{x} = \lambda \cdot (\vec{a} - \vec{b}). \text{ Επίσης, } \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{x}) = 0 \Rightarrow -3 + \vec{a} \cdot \vec{x} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{x} = 3 \Rightarrow \lambda(\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b}) = 3 \Rightarrow 4\lambda + 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{7}$$

$$\text{άρα } \vec{x} = \frac{3}{7} (\vec{a} - \vec{b}).$$