ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΑΠΟ ΤΗΝ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

2ο ΘΕΜΑ

2824. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΓΒΕ είναι ίσα. μ 13

β) $EH = \Delta Z$ μ 12

2846. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΓΕΒ είναι ίσα. μ 15

β) $A\Delta = AE$ μ 10

2847. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ.
Φέρουμε τις αποστάσεις ΜΚ και ΜΛ του σημείου Μ από τις ίσες πλευρές του τριγώνου.
Να αποδείξετε ότι:

α) $MK = M\Lambda$ μ 13

β) Η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας ΚΜΛ. μ 12

2848. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$.Από το μέσο Μ της βάσης του ΒΓ φέρουμε κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

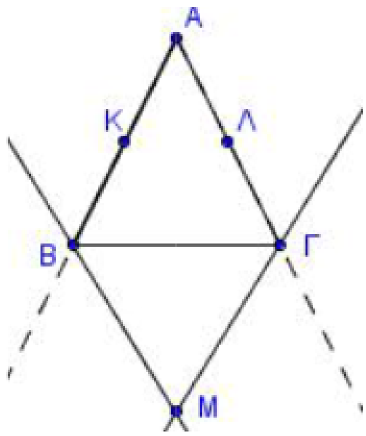
α) $M\Delta = ME$ μ 12

β) το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. μ 13

2854. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$.Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο σημείο Μ και Κ,Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές με $MB = M\Gamma$. μ 12

β) $MK = M\Lambda$ μ 13



3417. Έστω δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ $(AB = A\Gamma)$ και $A'B'\Gamma'(A'B' = A'\Gamma')$.

α) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\widehat{A} = \widehat{A'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. μ 13

β) Να αποδείξετε ότι αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\widehat{B} = \widehat{B'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. μ 12

3420. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ που αντιστοιχούν στις πλευρές του ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. μ 12

β) Αν τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. μ 13

3421. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ (προς το Μ) κατά ίσο τμήμα ΜΔ.Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα. μ 12

β) Τα σημεία Α και Δ ισαπέχουν από την πλευρά ΒΓ. μ 13

3423. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90^\circ\right)$ και ΒΔ η διχοτόμος της γωνίας Β. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ και έστω Ζ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΕΔ τέμνει την προέκταση της ΒΑ (προς το Α). Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = BE$ μ 13

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΖΕΒ είναι ίσα. μ 12

3426. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90^\circ\right)$ η διχοτόμος της γωνίας Γ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Από το Δ φέρουμε προς την πλευρά ΒΓ την κάθετο ΔΕ, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

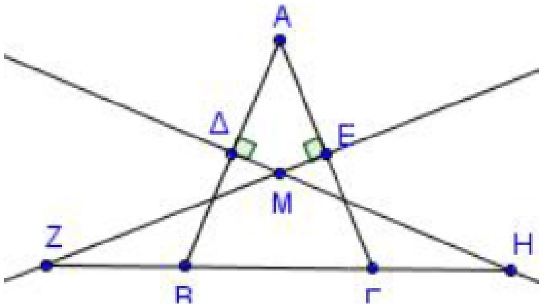
α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΓΕ είναι ίσα. μ 13

β) Η ευθεία ΓΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΕ. μ 12

4974. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AΓ$.Οι μεσοκάθετοι των ίσων πλευρών του τέμνονται στο Μ και προεκτεινόμενες τέμνουν τη βάση ΒΓ στα Ζ και Η.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΗ και ΕΖΓ. μ 15

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΖΗ είναι ισοσκελές. μ 10

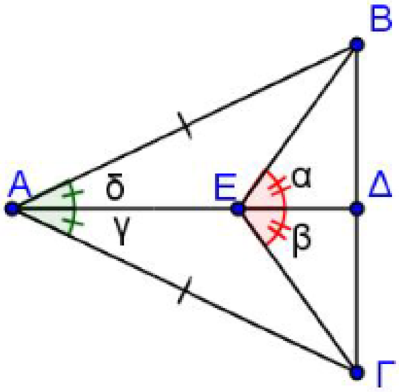


5035. Αν για το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(AB = AΓ)$ του σχήματος ισχύουν $\hat{\alpha}=\hat{\beta}$ και $\hat{\gamma}=\hat{\delta}$, να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΑΕΓ είναι ίσα. μ 8

β) Το τρίγωνο ΓΕΒ είναι ισοσκελές. μ 8

γ) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. μ 9

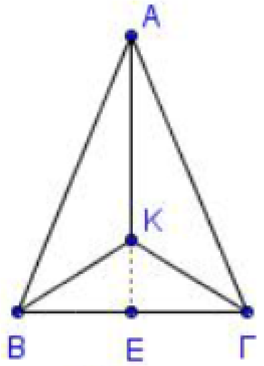


5069. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε τα τμήματα $AΔ = AB$ και $AE = AΓ$. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα. μ 12

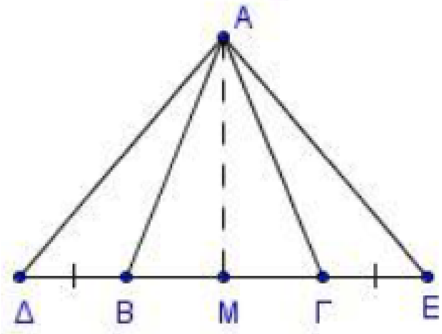
β) Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ προς τη κορυφή Α διχοτομεί την πλευρά ΔΕ του τριγώνου ΔΑΕ. μ 13

5048. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και Κ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΚΒ = ΚΓ$. Να αποδείξετε ότι:



α) Τα τρίγωνα ΒΑΚ και ΚΑΓ είναι ίσα. μ 12
β) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. μ 6
γ) Η προέκταση της ΑΚ διχοτομεί τη γωνία ΒΚΓ. μ 7

5053. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της πλευράς ΒΓ και προς τα δύο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και Ε αντίστοιχα έτσι ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Να αποδείξετε ότι:



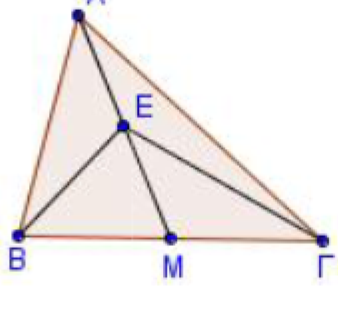
α) $\widehat{Β}_{εξ} = \widehat{Γ}_{εξ}$ μ 6
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα. μ 12
γ) Η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ είναι και διάμεσος του τριγώνου ΑΔΕ. μ 7

5075. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$ και σημείο Μ εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο, ώστε $ΜΒ = ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσα. μ 12
β) Η ΑΜ είναι διχοτομεί τη γωνία ΒΜΓ. μ 13

5136. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και στις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:
α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα. μ 5
β) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΜΕΓ είναι ίσα. μ 10
γ) το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές. μ 10

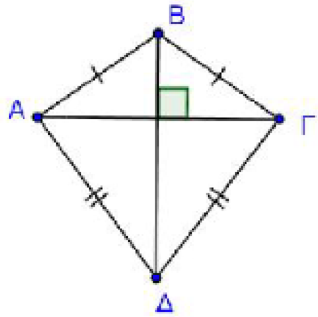
5139. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΚΑΒ $(ΚΑ = ΚΒ)$ και ΚΓ διχοτόμος της γωνίας Κ. Στην προέκταση της ΒΑ (προς το Α) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) παίρνουμε σημείο Μ, έτσι ώστε $ΑΛ = ΒΜ$. Να αποδείξετε ότι:
α) το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές. μ 12
β) η ΚΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΚΛΜ. μ 13

5597. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ε το μέσο της διαμέσου του ΑΜ. Αν $ΒΓ = 2ΒΕ$, να αποδείξετε ότι:



α) $Α\widehat{Ε}Β = Ε\widehat{Μ}Γ$ μ 12
β) $ΑΒ = ΕΓ$. μ 13

5144. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $ΔΑ = ΔΓ$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα. Να αποδείξετε ότι:



α) Η ΒΔ είναι διχοτόμος των γωνιών Β και Δ του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. μ 12

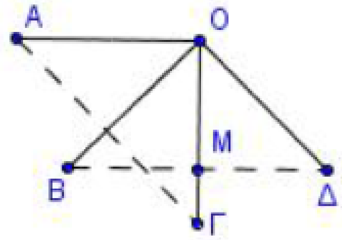
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. μ 13

5157. Δίνεται γωνία xOy και η διχοτόμος της Οδ. Θεωρούμε σημείο Μ της Οδ και σημεία Α και Β στις ημιευθείες Οχ και Οy αντίστοιχα, τέτοια, ώστε $ΟΑ = ΟΒ$. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΑ = ΜΒ$ μ 15

β) Η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΜΒ. μ 10

5560. Αν $Α\hat{Ο}Β = Β\hat{Ο}Γ = Γ\hat{Ο}Δ$ και $ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ = ΟΔ$, να αποδείξετε ότι:

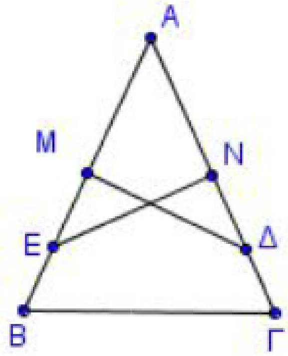


α) $ΑΓ = ΒΔ$ μ 10

β) το Μ είναι μέσο του ΒΔ, όπου Μ το σημείο τομής των τμημάτων ΟΓ και ΒΔ. μ 15

5582. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα τέτοια, ώστε $ΑΔ = ΑΕ$.
Να αποδείξετε ότι:

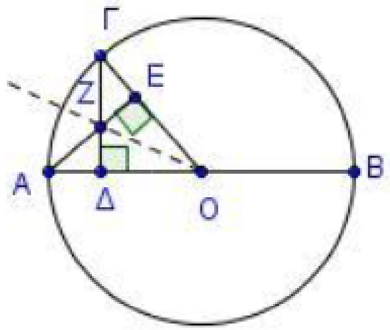
α) $ΒΕ = ΓΔ$ μ 6 **β)** $ΒΔ = ΓΕ$ μ 10 **γ)** $Δ\hat{Β}Γ = Ε\hat{Γ}Β$ μ 9



5591. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ΜΔ, ΝΕ οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $ΜΔ = ΝΕ$ τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. μ 12

β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ τότε $ΜΔ = ΝΕ$. μ 13

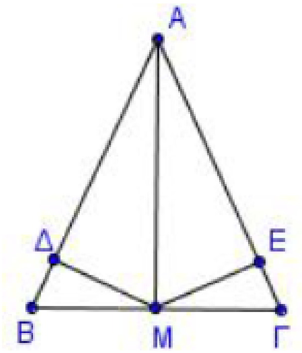


5634. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΔΟΕ είναι ισοσκελές. μ 13

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία ΑΟΓ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ. μ 12

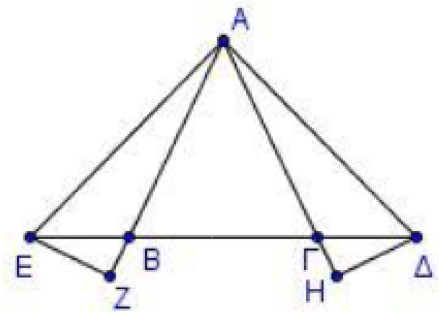
5592. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι:



α) Αν $ΜΔ = ΜΕ$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. μ 13

β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $ΜΔ = ΜΕ$.μ 12

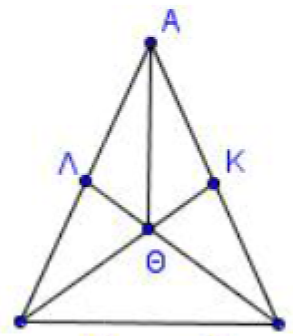
5595. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:



α) $ΑΔ = ΑΕ$ μ 12

β) $ΕΖ = ΔΗ$ μ 13

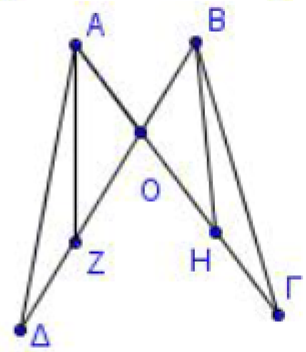
5607. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$ και τις διαμέσους του ΒΚ και ΓΛ οι οποίες τέμνονται στο Θ. Να αποδείξετε ότι:



α) Οι διάμεσοι ΒΚ και ΓΛ είναι ίσες. μ 12

β) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και ΑΓΘ είναι ίσα. μ 13

5628. Δίνονται τα τμήματα $ΑΓ = ΒΔ$ που τέμνονται στο σημείο Ο έτσι ώστε $ΟΑ = ΟΒ$ και σημεία Η και Ζ στα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΟΗ = ΟΖ$. Να αποδείξετε ότι:



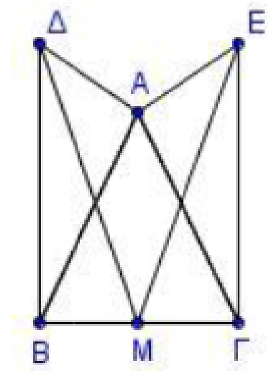
α) $Α\hat{Δ}Ο = Β\hat{Γ}Ο$. μ 12

β) $ΑΖ = ΒΗ$ μ 13

6592. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(ΑΒ = ΑΓ)$. Στα σημεία Β και Γ της ΒΓ φέρουμε προς το ίδιο μέρος της ΒΓ τα τμήματα $ΒΔ \perp ΒΓ$ και $ΓΕ \perp ΒΓ$ τέτοια, ώστε $ΒΔ = ΓΕ$. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα, μ 12

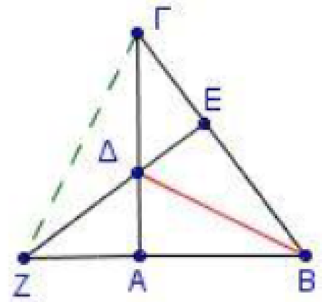
β) $ΑΔ = ΑΕ$. μ 13



7453. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\widehat{Α} = 90^\circ)$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $ΔΕ \perp ΒΓ$ που τέμνει την προέκταση της ΑΒ (προς το Α) στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΒΕ = ΑΒ$ μ 12

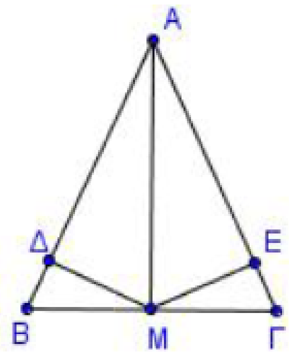
β) το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές. μ 13



5592. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τα κάθετα τμήματα ΜΔ και ΜΕ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι:

α) Αν $ΜΔ = ΜΕ$, τότε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα. μ 13

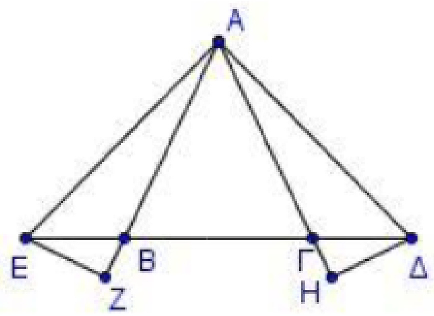
β) Αν $ΑΒ = ΑΓ$ και Μ το μέσο του ΒΓ, τότε $ΜΔ = ΜΕ$.μ 12



5595. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $ΑΒ = ΑΓ$. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε σημείο Δ και στην προέκταση της ΓΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε $ΓΔ = ΒΕ$. Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην ευθεία ΑΓ και από το Ε φέρουμε ΕΖ κάθετη στην ευθεία ΑΒ. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΔ = ΑΕ$ μ 12

β) $ΕΖ = ΔΗ$ μ 13

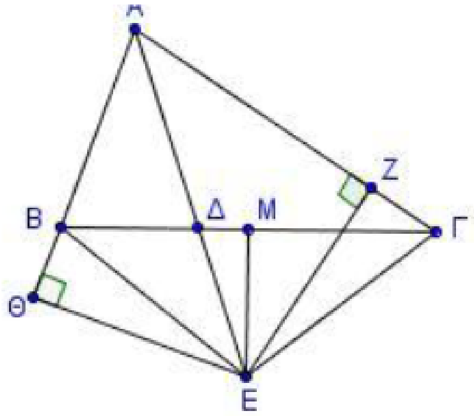


2787. Στο τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος, η κάθετη από το μέσο Μ της ΒΓ τέμνει την προέκταση της διχοτόμου ΑΔ στο σημείο Ε. Αν Θ,Ζ είναι οι προβολές του Ε στις ΑΒ,ΑΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΘΒΕ και ΖΓΕ είναι ίσα.

γ) $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 180^\circ$.



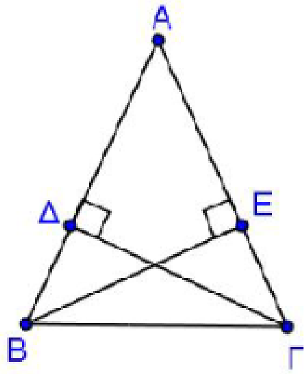
3695. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

Π: Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Gamma$, τότε τα ύψη ΒΕ και ΓΔ που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας. μ 10

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει. μ 10

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή** της ως ενιαία πρόταση. μ 5

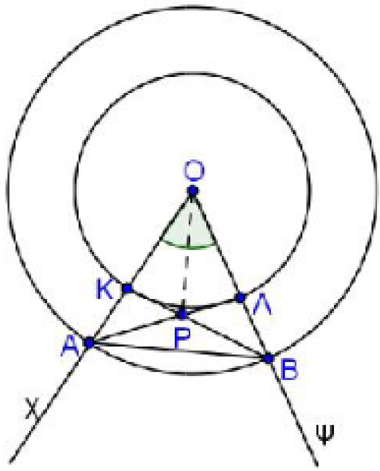


3696. Δίνεται οξεία γωνία xΟψ και δύο ομόκεντροι κύκλοι (O,ρ_1) και (O,ρ_2) με $\rho_1 < \rho_2$, που τέμνουν την Οx στα σημεία Κ,Α και την Οψ στα Λ,Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{A\Lambda} = \mathrm{BK}$ μ 8

β) Το τρίγωνο ΑΡΒ είναι ισοσκελές, όπου Ρ το σημείο τομής των ΑΛ, ΒΚ. μ 8

γ) Η ΟΡ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{\mathrm{O}}\psi$. μ 9



4741Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB} < \mathrm{A}\Gamma$. Στην προέκταση της ΑΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΕ=ΑΓ. Στην πλευρά ΑΓ θεωρούμε σημείο Δ έτσι ώστε $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AB}$.

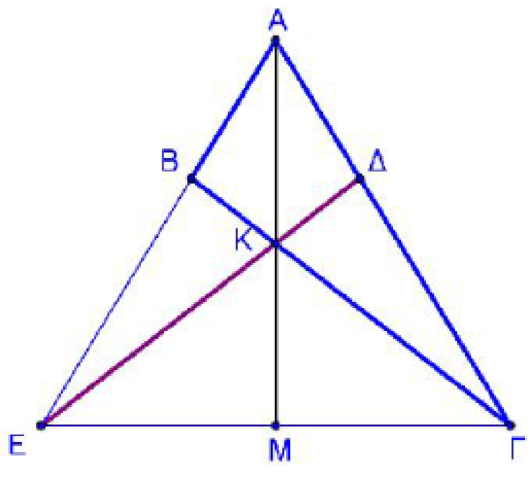
Αν τα τμήματα ΔΕ και ΒΓ τέμνονται στο Κ και η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΕΓ στο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) $\mathrm{B}\Gamma = \Delta\mathrm{E}$ μ 6

β) $\mathrm{BK} = \mathrm{K}\Delta$ μ 7

γ) Η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας Α. μ 6

δ) Η ΑΜ είναι μεσοκάθετος της ΕΓ. μ 6



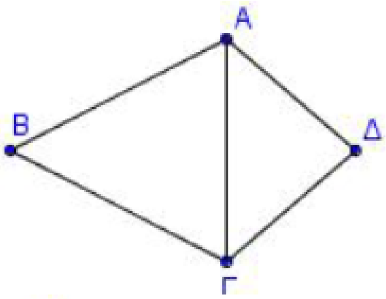
5029. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $ΒΑ = ΒΓ$ και $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $Β\widehat{Α}Γ = Β\widehat{Γ}Α$ μ 8

β) Το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές. μ 10

γ) Η ευθεία ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ. μ 7

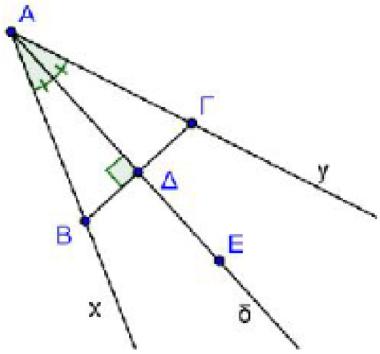


5619. Δίνεται γωνία xAy και η διχοτόμος της Αδ. Από τυχαίο σημείο Β της Αx φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την Αδ στο Δ και την Αy στο Γ.

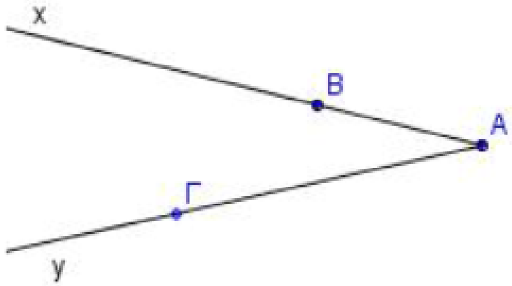
Να αποδείξετε ότι:

α) $ΑΒ = ΑΓ$ μ 12

β) Το τυχαίο σημείο Ε της Αδ ισαπέχει από τα Β και Γ. μ 13



5733. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το χάρτη μιας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες Αx και Αy παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία Β και Γ βρίσκονται δύο πλατάνια.



Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

α) ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. μ 9

β) ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. μ 9

γ) ισαπέχει και από τα δύο πλατάνια και από τα δύο ποτάμια. μ 7

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.