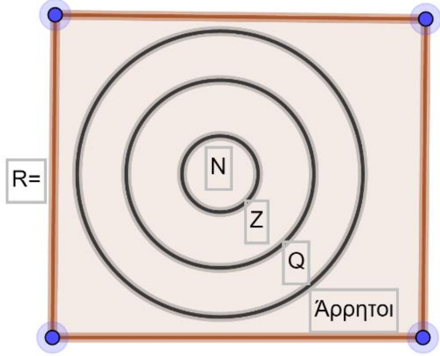
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΥΛΗ- ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

2.1 Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

- Τα σύνολα των αριθμών: Υπάρχουν:
  οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$, οι ακέραιοι $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$,
  οι ρητοί $\mathbb{Q}=\{\alpha/\beta,\ \text{όπου } \alpha,\beta\in\mathbb{Z},\ \beta\neq 0\}$.
  Είναι προφανές (;;) ότι ρητοί είναι όλα τα κλάσματα καθώς και όλοι οι αριθμοί που μπορούν να γραφτούν σαν κλάσμα, συνεπώς οι φυσικοί και οι ακέραιοι περιέχονται στους ρητούς. Προσοχή στους περιοδικούς δεκαδικούς, θυμηθείτε ότι μπορούν να γραφούν ως κλάσμα, συνεπώς περιλαμβάνονται στους ρητούς.
  Ακόμα, υπάρχουν οι άρρητοι αριθμοί, δηλαδή οι αριθμοί που δεν μπορούν να γραφτούν σε μορφή κλάσματος. Για το $\sqrt{2}$ υπάρχει η σχετική απόδειξη στο βιβλίο. Γνωστοί άρρητοι αριθμοί είναι το π (3,14…) καθώς και οι $\pm\sqrt{3},\ \pm\sqrt{5},\ \pm\sqrt{6},...$. Τέλος, η ένωση των ρητών και των άρρητων αριθμών φτιάχνει το σύνολο των πραγματικών αριθμών δηλαδή το $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\text{Άρρητοι})$. Δείτε το σχήμα:



- Οι δύο «νέες» ταυτότητες:
  $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ και $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$, που έρχονται να συμπληρώσουν τις ήδη γνωστές:
  $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$, $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$
  $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$, $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$
- Μια «παλιά» , λίγο χρησιμοποιημένη:
  $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\alpha\gamma$, $(\alpha+\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\alpha\gamma$

- Οι συμβολισμοί που χρησιμοποιούμε για κάποιους ακέραιους αριθμούς, δηλαδή: Ο αριθμός α είναι άρτιος, αν υπάρχει ακέραιος κ ώστε α=2κ. Ο αριθμός α είναι περιττός αν υπάρχει ακέραιος κ ώστε α=2κ+1.
  Ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 3, αν υπάρχει ακέραιος κ ώστε α=3κ. Ομοίως, ο αριθμός α είναι πολλαπλάσιο του 4 , του 5 , του 7 κ.λ.π, αν υπάρχει ακέραιος κ ώστε αντίστοιχα να ισχύει α=4κ, α=5κ, α=7κ και πάει λέγοντας! Προσέξτε, σε όλα τα παραπάνω ο αριθμός α είναι επίσης ακέραιος.
- Το σύνολο των ακέραιων αριθμών, είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης, του πολλαπλασιασμού (άρα και των δυνάμεων ακεραίων με εκθέτη φυσικό αριθμό), αλλά όχι ως προς τη διαίρεση, δηλαδή η διαίρεση δύο ακέραιων αριθμών δεν οδηγεί απαραίτητα σε ακέραιο.
- Οι μέθοδοι απόδειξης. Συγκεκριμένα, η <u>ευθεία απόδειξη</u> είναι που έχετε συνηθίσει και μάθει από το Γυμνάσιο. Ξεκινάμε από τα δεδομένα και κάνοντας επιτρεπτές πράξεις ή δικαιολογημένους από τη θεωρία συλλογισμούς φτάνουμε στο ζητούμενο.
  Για παράδειγμα, αν ζητηθεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\alpha=5\cdot 2^{\nu+1}+4\cdot 5^{\nu+1}$ είναι

πολλαπλάσιο του 10, δουλεύουμε ως εξής:

$$\alpha = 5 \cdot 2^{\nu+1} + 4 \cdot 5^{\nu+1} = 5 \cdot 2 \cdot 2^{\nu} + 4 \cdot 5 \cdot 5^{\nu} = 10 \cdot 2^{\nu} + 20 \cdot 5^{\nu} = 10\left(2^{\nu} + 2 \cdot 5^{\nu}\right) = 10\kappa,\ \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παρατηρήστε ότι η ποσότητα μέσα στην παρένθεση είναι ακέραιος αριθμός και πήραμε την πρωτοβουλία να τον συμβολίσουμε με ένα γράμμα. Με αυτό τον τρόπο κάνατε και τις αποδείξεις των ιδιοτήτων των δυνάμεων.

Η άλλη μέθοδος απόδειξης είναι η απαγωγή σε άτοπο. Δηλαδή, δεχόμαστε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο και κάνοντας επιτρεπτές πράξεις ή συλλογισμούς, καταλήγουμε σε κάτι που είναι λανθασμένο, συνεπώς η άρνηση του ζητούμενου ήταν λάθος, οπότε έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη.

Για παράδειγμα, αν πρέπει να αποδείξουμε ότι το άθροισμα ενός ρητού και ενός άρρητου είναι άρρητος αριθμός, μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής: Έστω ότι ο ρ είναι ρητός και ο α είναι άρρητος. Έστω επίσης ότι το άθροισμά τους είναι ρητός! Τότε υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί κ, λ, μ, ν ώστε ρ=κ/λ και α + ρ=μ/ν δηλαδή έχουμε:

$\alpha + \frac{\kappa}{\lambda} = \frac{\mu}{\nu} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mu}{\nu} - \frac{\kappa}{\lambda} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\mu\lambda - \kappa\nu}{\lambda\nu}$, δηλαδή ο α γράφεται σαν κλάσμα, συνεπώς ο α είναι ρητός, που είναι άτοπο!! Συνεπώς, αποδείξαμε ότι ο $\alpha + \rho$ είναι άρρητος. Εννοείται πως στα παραπάνω κλάσματα, οι αριθμοί λ και ν δεν είναι μηδέν.

- Υπάρχουν ακόμα οι ιδιότητες των δυνάμεων με βάση πραγματικό αριθμό και εκθέτη ακέραιο, γνωστές από την ύλη της Β Γυμνασίου. Να υπενθυμίσω , όσον αφορά το πρόσημο, ότι ένας αρνητικός αριθμός που υψώνετε σε περιττό εκθέτη δίνει αρνητικό αποτέλεσμα. Σε κάθε άλλη περίπτωση το αποτέλεσμα της ύψωσης σε δύναμη είναι θετικός.

  Ο αρνητικός εκθέτης σημαίνει απλώς ότι πρέπει να αντιστρέψουμε τη βάση και να κάνουμε τον εκθέτη θετικό.

  Προσοχή!!! Αν έχετε μεταβλητές υψωμένες σε αρνητικό εκθέτη, έχετε την επιλογή να μην αντιστρέψετε, αλλά να προχωρήσετε σε πράξεις εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των δυνάμεων. Για παράδειγμα, αν πρέπει να υπολογίσετε την ποσότητα $(\alpha^{-2})^{-3}$, μπορείτε να γράψετε κατευθείαν το αποτέλεσμα α^6 και όχι $(1/\alpha^2)^{-3}$ …
- Από τις ιδιότητες των αναλογιών, πέραν της πασίγνωστης «χιαστί» , δώστε σημασία στις παρακάτω ιδιότητες (θεωρήστε ότι οι παρονομαστές είναι γενικά διάφοροι του μηδενός, ώστε να ορίζονται τα αντίστοιχα κλάσματα):

  Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ τότε ισχύουν και τα παρακάτω: $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{\gamma}{\gamma+\delta}$ και $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} = \lambda.$

  Επίσης, να θυμάστε ότι ο πιο απλός τρόπος να αποδείξετε σχέσεις με αναλογίες ή να λύσετε ασκήσεις με αυτές, είναι να συμβολίζετε με ένα γράμμα (το λ στην περίπτωσή μας) την τιμή της ισότητας δύο λόγων: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$ και στη συνέχεια να αντικαθιστάτε τα α και γ με τις ποσότητες λβ και λδ αντίστοιχα.
- Μεγάλη προσοχή στις περιπτώσεις:

  Αν $\alpha\beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$, ενώ αν $\alpha\beta \neq 0$ τότε $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$.

  Επίσης, θυμηθείτε ότι $(\text{οτιδήποτε})^{2\nu}$, όπου ν ακέραιος, είναι μη αρνητική ποσότητα.

2.2 Διάταξη πραγματικών αριθμών

- Στα δύο μέλη μιας ανίσωσης μπορούμε να επέμβουμε με τους παρακάτω τρόπους:
  1. Αν $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\pm\gamma<\beta\pm\gamma$
  2. Αν $\alpha<\beta$ και γ θετικός τότε: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma}<\frac{\beta}{\gamma}$
  3. Αν $\alpha<\beta$ και γ αρνητικός τότε: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma>\beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\gamma}$
  4. Αν α,β ομόσημοι τότε: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}$
  5. Αν α,β θετικοί αριθμοί και ν φυσικός, τότε: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha^\nu<\beta^\nu$
- Αν έχουμε δύο ή περισσότερες ομοιόστροφες ανισώσεις μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη και να προκύψουν ομοιόστροφες επίσης ανισώσεις.
  Αν , επιπλέον, όλοι οι όροι των ομοιόστροφων ανισώσεων είναι θετικοί αριθμοί, τότε επιτρέπεται να πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις ανισότητες.
  !!!!Δεν επιτρέπεται η αφαίρεση και η διαίρεση κατά μέλη δύο ανισοτήτων , όποιους περιορισμούς και αν βάλετε!!!!
- Επειδή ισχύει ότι :
  $(\text{οτιδήποτε})^{2\kappa}\geq 0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{Z}$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι:
  1. Αν $\alpha^{2\kappa}\leq 0$ τότε $\alpha=0$ 2. Αν $\alpha^{2\kappa}+\beta^{2\nu}=0$ ή $\alpha^{2\kappa}+\beta^{2\nu}\leq 0$ τότε $\alpha=0$ και $\beta=0$.
- Αν δίνονται κάποιες ανισοτικές σχέσεις και σας ζητούν να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται κάποιες νέες ποσότητες, θυμηθείτε ότι για να σχηματίσετε την ποσότητα α-β θα πρέπει να την έχετε στο μυαλό σας ως α+(-β) , ενώ την ποσότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$, αφού δεν επιτρέπεται η κατά μέλη αφαίρεση ή διαίρεση ανισοτήτων.
- Συνηθίστε να μετατρέπετε τις ανισώσεις σε διαστήματα και αντίστροφα. Κλειστό διάστημα σημαίνει ότι στην ανισότητα πρέπει να υπάρχει και το «ίσον». Επίσης , πρέπει να μπορείτε να συναληθεύσετε ανισώσεις ακόμα και χωρίς τη χρήση άξονα! Σκεφτείτε ότι αν οι ανισώσεις είναι ομοιόστροφες, η μία από αυτές καλύπτει και όλες τις υπόλοιπες. Αν δεν είναι ομοιόστροφες, τότε η συναλήθευση θα οδηγεί σε διάστημα με άκρα πραγματικούς αριθμούς ή δεν θα συναληθεύουν καθόλου οι ανισώσεις.

2.3 Απόλυτες τιμές

- Ο ορισμός της απόλυτης τιμής, μας επιτρέπει να «βγάζουμε» την απόλυτη τιμή, μόνο εάν γνωρίζουμε το πρόσημο της ποσότητας που περιέχεται σε αυτήν. Δηλαδή, |Α|= Α αν το Α είναι μη αρνητικός, ενώ |Α|=-Α αν αυτό το Α είναι αρνητικός.
  Αν δεν γνωρίζουμε το πρόσημο και θέλουμε να γράψουμε την παράσταση χωρίς την απόλυτη τιμή, είμαστε υποχρεωμένοι να διακρίνουμε περιπτώσεις.
  Για παράδειγμα, αν δίνεται ότι 2<α<3, η παράσταση Κ=|α-2|-|α-3|γράφεται ως εξής: Κ=α-2+α-3 =2α-5. Χωρίς την συνθήκη, θα έπρεπε να πάρουμε περιπτώσεις ως εξής:
  Αν $\alpha\leq 2$, Κ=-α+2+α-3=-1, αν 2<α<3 θα ήταν Κ=2 α-5, ενώ αν $\alpha\geq 3$,η Κ=α-2-α+3=1.

- Μπορούμε, με βάση τον ορισμό, να λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)|=\alpha,\ \alpha>0$. Συγκεκριμένα, $|f(x)|=\alpha \Rightarrow f(x)=\alpha$ ή $f(x)=-\alpha$.

  Ισχύει ακόμα ότι $|f(x)|=0 \Leftrightarrow f(x)=0$.
- Προσοχή στις ιδιότητες:

  $-|x|\le x\le |x|,\ |x|^2=x^2$ και η τριγωνική ανισότητα: $||\alpha|-|\beta||\le|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

  Επίσης, ισχύουν οι προφανείς $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ και $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$. Η πρώτη ισχύει και για περισσότερους από δύο όρους.
- Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής, είναι ότι το |α| εκφράζει την απόσταση (άρα μη αρνητικός αριθμός!) του αριθμού α από το 0, στην ευθεία των πραγματικών αριθμών, ενώ το |α-β| την απόσταση των αριθμών α και β, επίσης πάνω στην ευθεία των αριθμών. Συμβολικά: $d(x,0)=|x|=|-x|,\ d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$. Όπως βλέπετε, μπορείτε αν θέλετε να αλλάξετε το πρόσημο της ποσότητας μέσα στο απόλυτο!
- Ισχύουν οι σχέσεις:

  $|x|\le\alpha \xleftrightarrow{\alpha>0} -\alpha\le x\le\alpha$ και $|x|\ge\alpha \xleftrightarrow{\alpha>0} x\ge\alpha$ ή $x\le-\alpha$.

  Αν $\alpha<0$, η πρώτη ανίσωση είναι αδύνατη, ενώ η δεύτερη είναι ταυτότητα.

  Στην ενότητα αυτή, το βιβλίο επιμένει να μπορείτε να συνδυάσετε τη γεωμετρική ερμηνεία με τις ανισώσεις και τα διαστήματα στα οποία ανήκει η μεταβλητή. Για παράδειγμα: $|x-2|<5$, σημαίνει πως ψάχνουμε αριθμούς ώστε η απόστασή τους από το 2 να είναι το πολύ 5 μονάδες, δηλαδή $d(x,2)<5$,οπότε αν "ανεβοκατέβουμε" 5 μονάδες από το 2, πάμε από το -3 ως το 7, δηλαδή $-3<\chi<7$ ή $x\in(-3,7)$.

  Αν δίνεται ότι $x\in[-5,1]$, βρίσκω το μεσαίο αριθμό των $-5, 1$ που είναι το -2. Αυτό απέχει 3 μονάδες από κάθε άκρο, συνεπώς θέλουμε τους αριθμούς οι οποίοι απέχουν έως και τρεις μονάδες από το -2, δηλαδή $|x+2|\le 3 \Leftrightarrow d(x,-2)\le 3$.

  Βέβαια, μπορείτε να επιλύετε και αλγεβρικά, στηριγμένοι στις ισοδυναμίες που περιγράψαμε αρχικά, αλλά αυτό θα αξιοποιηθεί στις ασκήσεις επόμενης ενότητας.
- Επειδή το αποτέλεσμα μιας απόλυτης τιμής είναι γενικά μη αρνητικός αριθμός, ισχύει ότι αν $|\alpha|+|\beta|=0$ τότε υποχρεωτικά $\alpha=0$ και $\beta=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦ. 2ο Παράγραφοι 2.1 και 2.2 Ταυτότητες, ιδιότητες δυνάμεων, διάταξη

2.1 Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

1. $15a^3x-15a^3y+5a^2\beta x-5a^2\beta y$
2. $a^4x^2-a^3x^3-a^3x+a^2x^2$
3. $x^2-4xy^2-16+4y^4$
4. $4x^2-9y^2-6yz-z^4$
5. $4a^2x^2-4b^2x^2-9a^2y^2+9b^2y^2$
6. $3a^2x^2-3b^2x^2+6bx^3-3x^4$
7. $4xy(x-y)-6x(x-y)^2+2x(x^2-y^2)$
8. $x^2-y^2+4x-2y+3$
9. $x^2(y-w)+y^2(w-x)+w^2(x-y)$
10. $(\alpha\chi+\mu\beta\psi)^2-\mu(\alpha\psi+\beta\chi)^2$

2.2 Να απλοποιήσετε – αφού πρώτα κάνετε ομώνυμα – τα παρακάτω κλάσματα:

1. $\frac{2(\alpha-\beta)}{\alpha^3+\alpha^2\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha^3+\alpha\beta^2+2\alpha^2\beta}-\frac{5}{\alpha^2+\alpha\beta}$ 2. $\frac{3\alpha+\beta}{2\alpha^2-3\alpha\beta}-\frac{2\alpha+\beta}{3\alpha\beta-2\alpha^2}+\frac{12\alpha+10\beta}{9\beta^2-4\alpha^2}$

3. $\frac{1}{x-y}+\frac{2x+y}{x^2+xy}-\frac{2x-y}{xy-y^2}$ 4. $\frac{x-3}{3x^2+x}-\frac{x+3}{x-3x^2}-\frac{x}{9x^2-1}+\frac{4x^2-7}{9x^3-x}$

2.3 Να αποδείξετε ότι:

1. $(\alpha\chi+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta\chi)^2+(\gamma\chi+\delta\psi)^2+(\gamma\psi-\delta\chi)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\chi^2+\psi^2)$

2. $\chi^4-\psi^4-(\chi-\psi)^3(\chi+\psi)=2\chi\psi(\chi^2-\psi^2)$

3. $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

4. $(x^2-1)(y^2-1)(w^2-1)+(x+yw)(y+wx)(w+xy)=(xyw+1)(x^2+y^2+w^2+2xyw-1)$

2.4 Αν ισχύουν οι σχέσεις: a+b=3, ab=-2, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

a^2+b^2, a^3+b^3, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a^2}+\frac{a}{b^2}$, a^2b+ab^2

2.5 Αν ισχύει η σχέση: $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$, να αποδείξετε ότι x=y=z.

2.6 Αν ισχύει η σχέση: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, να δείξετε ότι: $\frac{yz}{x^2}+\frac{xz}{y^2}+\frac{xy}{z^2}=3$

2.7 Να απλοποιήσετε χρησιμοποιώντας ιδιότητες δυνάμεων τις παρακάτω παραστάσεις και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή τους για τις τιμές των μεταβλητών που δίνονται κάθε φορά:

1. $\frac{x^{-2}\cdot(y^{-1}\cdot\frac{1}{x^{-3}})^{-2}}{\left(x^{-3}\cdot\frac{1}{y^{-2}}\right)^{-1}\cdot y^{-7}}$, για $x=-2018,\ y=2018$ 2. $\frac{\left(x^3:y^{-2}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{x^{-2}}{y^3}\cdot\frac{1}{x}\right)^{-2}}{\left(\frac{x^{-3}}{y^{-1}}:\frac{x^2}{y^3}\right)^{-1}\cdot x^{-10}}$, για $x=4,5\ \ y=0,\overline{2}$

2.8 α. Αν ν φυσικός αριθμός να δείξετε ότι ο αριθμός $a=2\cdot3^{\nu+1}+3^{\nu+2}$, είναι πολλαπλάσιο του 5.

β. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $\beta=10\cdot5^{\nu-1}+3\cdot5^{\nu+1}+5^{\nu+2}$ είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 21.

2.9 Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

a. $2019^2+2018^2-4036\cdot2019$ b. $\left(\frac{2018}{2019}+\frac{2019}{2018}\right)^2-\left(\frac{2018}{2019}-\frac{2019}{2018}\right)^2$

2.10 Αν γνωρίζετε ότι : $\frac{1}{2}\le x<1\ \ και\ \ \frac{1}{3}<y\le2$, να βρείτε σε ποια διαστήματα πραγματικών αριθμών ανήκουν οι παρακάτω παραστάσεις:

$a.\ 2x+3y-5\ \ b.\ 3-4x\ \ c.\ 1-\frac{3}{y}\ \ d.\ 4-6xy\ \ e.\ \frac{4}{x}-\frac{3}{y}\ \ f.\ 4x^2+9y^2+12xy$

2.11 Να αποδείξετε ότι:

a. $x^2+xy+y^2\geq 0$ b. $x^2-xy+y^2\geq 0$ c. $x+\frac{1}{x}\geq 2$ για $x>0$ d. $\frac{2x}{x^2+1}\geq -1$

2.12 Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

a. $x^2+2x+y^2+1\leq 0$ b. $x^2-x+\frac{1}{4}+y^2\leq 0$ c. $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

2.13 Αν ισχύει ότι: $x<2<y$, να αποδείξετε ότι $x+y>2+\frac{xy}{2}$

2.14 Να συγκρίνετε τους αριθμούς 3^{57} και 5^{38}.

2.15 Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=617^4-578^4$ είναι πολλαπλάσιο του 39.

Παράγραφος 2.3. Απόλυτες τιμές

2.16 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις, με τη βοήθεια των συνθηκών που δίνονται σε κάθε περίπτωση:

$A=|x-2|-|3-x|+2|-x|,\quad \alpha\nu\quad 2<x<3.$

$B=|x+2|-2|x+3|+5|x|-|x+1|,\quad \alpha\nu\quad -3<x<-2.$

$\Gamma=|a-x|-|b-y|-|a-b|-|y-x|,\quad \alpha\nu\quad x<a<y<b.$

2.17 Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές

$A=3x-|x-2|$ $B=|2x-1|-x+1$

$\Gamma=|x-2|^2-|1-x|^2+|x+1|$ $\Delta=|2-|x||$

2.18 Αν γνωρίζετε ότι |α|=3 και |β|=2, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των παραστάσεων: K=|α-2β| και Λ=|4-α|+|β-2|.

2.19 Αν ισχύει -3<χ<0 να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A=|\chi^2+3\chi|-|\chi+4|+|\chi-1|$, $B=\chi|\chi-2|+|\chi^2-4\chi+4|+6|\chi|$ και $\Gamma=|\chi-\chi^2|-|4\chi+12|-|\chi||3-|\chi||$

2.20 Να αποδείξετε ότι:

a. $\frac{|x|}{|y|}+\frac{|y|}{|x|}\geq 2$ b. $\left|x-\frac{1}{x}\right|=|x|-\frac{1}{|x|}$ c. $\left|\frac{3x+7y}{3y+7x}\right|<1\Leftrightarrow\frac{|x|}{|y|}>1$

2.21 Αν ισχύουν $|\chi-2|<1$ και $|\psi-4|<3$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι παραστάσεις: a. $\chi+2\psi$ b. $\pi\chi^2-\psi$

2.22 Αν ισχύει ότι $|\alpha|\leq 3$, να δείξετε ότι $|\alpha^2-5\alpha+7|\leq 31$.

2.23 Να βρείτε τις τιμές του x, σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

a. $d(x,-3)<5$ b. $d(2x,1)>5$ c. $d(x^2,-1)=10$ d. $d(x,2)+d(2x,4)=0$

2.24 Αν ισχύουν οι σχέσεις: $|x|<2$ και $|y|<\frac{1}{3}$, να δείξετε ότι: $|2x-3y+1|<6$

2.25 α. Να αποδείξετε την ισοδυναμία: $|a|<|b|\Leftrightarrow a^2<b^2$ $\textit{για κάθε}$ $a,b\in\mathbb{R}$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: |2χ-3|<|4+2χ|

γ. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, b ισχύουν οι σχέσεις: $|a|\neq|b|$ $\textit{και}$ $1+|ab|<|a+b|$, να αποδείξετε ότι: $|a|<1<|b|$ ή $|b|<1<|a|$.

2.26 Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς α και b ισχύει ότι: $|a+b|<|a-b|$, να αποδείξετε ότι:

α. Οι α και b είναι ετερόσημοι.

β. Ισχύει η σχέση: $a|b|+b|a|=0$

γ. Αν επιπλέον των προηγούμενων σχέσεων ισχύει ότι $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1=0$, να αποδείξετε ότι α<0 και b<0.

2.27 Αν ισχύουν οι σχέσεις: $|x|<2$, $|y-3|<1006$ $\textit{και}$ $|3x-z|<8$ να αποδείξετε ότι: $|xy-z|<2020$