## ΘΕΜΑ Δ

$f(x) = x\alpha^2 + 3(x + \eta\mu x) + 2\alpha\sigma\upsilon\nu x$

Δ1. $f'(x) = \alpha^2 + 3 + 3\sigma\upsilon\nu x - 2\alpha\eta\mu x = \alpha^2 - 2\alpha\eta\mu x + 3 + 3\sigma\upsilon\nu x$.

Θεωρώ την $f'(x)$ ως τριώνυμο μεταβλητής $\alpha$, και βρίσκω

την $\Delta = 4\eta\mu^2 x - 12 - 12\sigma\upsilon\nu x = 4 - 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 12 - 12\sigma\upsilon\nu x =$

$-4\sigma\upsilon\nu^2 x - 12\sigma\upsilon\nu x - 8 = -4(\sigma\upsilon\nu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x + 2) \Rightarrow$

$\Delta = -4(\sigma\upsilon\nu x + 1)(\sigma\upsilon\nu x + 2) \le 0$ συνεπώς η $f'(x) \ge 0$ $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

δηλ. $f \nearrow$ στο $\mathbb{R}$.

Βρίσκω το σύνολο τιμών της: $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\alpha^2 + 3 + 3\frac{\eta\mu x}{x} + 2\alpha\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}\right) = \ldots = -\infty$

Ομοίως, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, δηλ. σύνολο τιμών $= \mathbb{R}$.

Συνεπώς η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα.

Δ2. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 2\alpha}{x} = 7 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\alpha^2 + 3x + 3\eta\mu x + 2\alpha\sigma\upsilon\nu x - 2\alpha}{x} = 7 \Rightarrow$

$\lim\limits_{x \to 0}\left(\alpha^2 + 3 + \frac{3\eta\mu x}{x} + 2\alpha\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 7 \Rightarrow \alpha^2 + 6 = 7 \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow$

$\alpha = \pm 1$. Επειδή $f(0) = 2\alpha$ και η $f$ έχει θετική ρίζα και

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, πρέπει $2\alpha < 0$, συνεπώς δεκτή τιμή η $\alpha = -1$.

άρα $f(x) = 4x + 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$.

Δ3. Η εφαπτ. στο $x_0$: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \xrightarrow{(0,0)} f(x_0) = x_0 f'(x_0)$

$\Rightarrow \cancel{4x_0} + 3\eta\mu x_0 - 2\sigma\upsilon\nu x_0 = \cancel{4x_0} + 3x_0\sigma\upsilon\nu x_0 + 2\eta\mu x_0 \cdot x_0$

Θεωρώ την συνάρτηση $h(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x - 3x\sigma\upsilon\nu x - 2x\eta\mu x$.

Η $h(x)$ συνεχής, $h(0) = -2 < 0$ $\quad h(\pi) = 2 + 3\pi > 0$, άρα (ΘΒ)

υπάρχει $x_0 \in (0, \pi)$ ώστε $h(x_0) = 0$.

Δ4. Η $f \nearrow$ στο $[\pi/4, \pi/2]$ άρα $f(x) \in [f(\pi/4), f(\pi/2)] = \left[\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\pi + 3\right]$

ενώ η $K(x) = -x^2 + 2x + 2$, με $K'(x) = -2x + 2$

| $x$ | $\pi/4$ | | $1$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $K'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $K(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

έχει μέγιστο για $x = 1$, $K(1) = 3 < \pi + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = K(x)$ είναι αδύνατη.