ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ CORONA 3 - 1920

ΘΕΜΑ Α

Α2. Ψευδής, πρέπει η συνάρτηση f να είναι γνησίως αύξουσα.
Για παράδειγμα, η $f(x)=+x^2$ με την αντίστροφή της $f^{-1}(x)=+\sqrt{-x}$ για $x\in(-\infty,0]$ έχουν κοινό το σημείο $(-1,1)\notin y=x$.

Α4. Λάθος - Λάθος - Λάθος - Σωστό - Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) $\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{g(x)} \overset{\frac{1}{0^+}}{=} +\infty$ β) $\lim_{x\to -1^-}\frac{g(x)}{f(x)} \overset{\frac{2}{0^-}}{=} -\infty \neq \lim_{x\to -1^+}\frac{g(x)}{f(x)} \overset{\frac{2}{0^+}}{=} +\infty$, δεν υπάρχει.

γ) $\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ δ) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)\cdot g(x)}{(x+2)^2} \overset{\frac{\text{αρνητ}}{0^+}}{=} -\infty$

Β2. Η συνάρτηση $h(x)=\frac{g(x)}{g'(x)}$ ορίζεται στο $(-3,-2)\cup(-1,1)$

Β3. Με ΘΜΤ για την $g(x)$ στο διάστημα $[-3,-1]$, υπάρχει $\xi\in(-3,-1)$ ώστε $g'(\xi)=\frac{2-0}{-1+3}=1$ // $y=x$.

Β4. Η συνάρτηση $h(x)=g(x)-f(x)$ είναι συνεχής στο $[-3,-1]$ άρα παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $x_0\in(-3,-1)$ και αφού η $h(x)$ παραγωγίσιμη (ως πράξεις παραγωγίσιμων) πρέπει (Θ. Fermat) $h'(x_0)=0 \Rightarrow g'(x_0)=f'(x_0)$ δηλ. οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στο x_0 είναι παράλληλες μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. για $x\neq 0$, $f'(x)=1-\frac{2}{\sqrt{x}}$ άρα $f(x)=x-4\sqrt{x}+c$ και αφού $f(0)=4 \Rightarrow c=4$, άρα $f(x)=x-4\sqrt{x}+4=(\sqrt{x}-2)^2$.

Γ2. Είναι $f'(x)=2(\sqrt{x}-2)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}<0\ \forall x\in(0,4)$ άρα $f\searrow$ στο $[0,4]$ δηλ. είναι 1-1.
Το σύνολο τιμών της f στο $[0,4]=[f(4),f(0)]=[0,4]$ δηλ. το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$ είναι το $[0,4]$.