ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ – CORONA2- 1920

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , για την οποία ισχύει ότι $f'(x)=0$ για κάθε σημείο x εσωτερικό του διαστήματος Δ. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή στο Δ. **(8 μονάδες)**

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; **(3 μονάδες)**

Α3. Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν μια μη σταθερή συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει σημείο εσωτερικό του Δ στο οποίο η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στον άξονα xx΄»

Να χαρακτηρίσετε ως «Αληθή» ή «Ψευδή» τον παραπάνω ισχυρισμό και να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. **(1 + 3 μονάδες)**

Α4. Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστό» ή «Λάθος» τους παρακάτω ισχυρισμούς:

1. Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , όπου f μια αντιστρέψιμη συνάρτηση , εφόσον υπάρχουν, βρίσκονται πάνω στην ευθεία y=x.
2. Για μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο x_0 ορίζεται πάντα η εφαπτομένη της στο x_0.
3. Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\eta\mu\frac{1}{x}=0$
4. Μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα σύνολο Δ , για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε χ στο σύνολο Δ, είναι σταθερή.
5. Το ελάχιστο μιας συνάρτησης f, αν υπάρχει, είναι το μικρότερο κατά απόλυτη τιμή από τα τοπικά της ελάχιστα. **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους: $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ και $g(x)=\ln x$.

Β1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να αποδείξετε ότι $f^{-1}(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

(8 μονάδες)

Β2. Να βρείτε την συνάρτηση $(f\circ g)(x)$. **(4 μονάδες)**

Έστω ότι $h(x)=(f\circ g)(x)=\frac{x^2-1}{2x},\ x>0$.

Β3. Να υπολογίσετε τα όρια: i. $\lim\limits_{x\to0}h(x)$ ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(h(x)\cdot\eta\mu\frac{1}{x})$ **(6 μονάδες)**

Β4. Να λύσετε την ανίσωση: $h(x)\le g(x)$ **(7 μονάδες)**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=4-x^2$.

Γ1. Να περιορίσετε κατάλληλα τις τιμές του πραγματικού αριθμού k, ώστε από το σημείο M(0,k) να άγονται δύο ακριβώς εφαπτόμενες προς τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f (5 μονάδες) και στη συνέχεια να βρείτε το k ώστε οι εφαπτόμενες αυτές να είναι κάθετες μεταξύ τους. (3 μονάδες)

Γ2. Έστω ένα σημείο A(α , f(α)) , $0<\alpha<2$, το οποίο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με τρόπο ώστε η προβολή B του σημείου A στον xx΄ να απομακρύνεται από το O(0,0) με ταχύτητα $\frac{1}{2}$

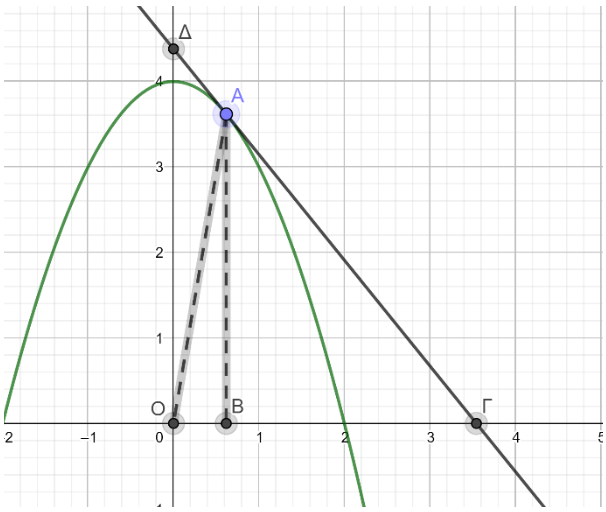
cm/s. Αν ονομάσουμε Γ το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της f στο Μ, τέμνει τον xx΄, τότε:

i. Να βρείτε την ταχύτητα με την οποία το Γ πλησιάζει στο Ο(0,0) , την χρονική στιγμή κατά την οποία η τεταγμένη του Α είναι ίση με 3cm.

(6 μονάδες)

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΟΑ, την ίδια χρονική στιγμή. (5 μονάδες)

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τιμή ρ, 0<ρ<1 , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΟΓ να ισούται με 7cm^2. (6 μονάδες)



ΘΕΜΑ Δ

Σε μια πόλη 12.000 κατοίκων, μέρος του πληθυσμού της έχει προσβληθεί από έναν ιό. Η συνάρτηση που δίνει τον αριθμό των κρουσμάτων (σε χιλιάδες) είναι η f(t) , t σε εβδομάδες, με τύπο:

$$f(t)=\begin{cases} e^{\frac{t}{2}}\left(-t^2+2t+4\right), & t\in[0,3] \\ -\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{6}t+\dfrac{3e^{\frac{3}{2}}}{2}, & t\in(3,t_o] \end{cases}$$

, όπου t_o η χρονική στιγμή που όλοι οι κάτοικοι είναι υγιείς.

Δ1. Να βρείτε το πλήθος των νοσούντων όταν άρχισε η καταμέτρηση και να αποδείξετε ότι t_o=9 εβδομάδες. **(3 μονάδες)**

Δ2. Να βρείτε ποια χρονική στιγμή έχουμε το μέγιστο πλήθος κρουσμάτων. **(10 μονάδες)**

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο χρονικές στιγμές στο διάστημα των 9 εβδομάδων όπου ο αριθμός των κρουσμάτων είναι 6000 άνθρωποι. **(8 μονάδες)**

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο μια χρονική στιγμή κατά την οποία οι άρρωστοι είναι ακριβώς 2000 άνθρωποι. **(4 μονάδες)**

Δίνεται ότι $e\simeq 2,7$ και $e^{\frac{3}{2}}\simeq 4,48$.