Θεωρώ την $T:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $T(x)=x^2-2x\cdot\ln x-1$.

Είναι $T(1)=0$, $T'(x)=2x-2\ln x-2=2(x-\ln x-1)$.

Όμως, $x-\ln x-1\geq 0$ για κάθε $x>0$ (η ισότητα μόνο για $x=1$).

και άρα $T\nearrow$ στο $(0,+\infty)$.

και άρα η (1) γράφεται: $T(x)\leq T(1) \overset{T\nearrow}{\Longleftrightarrow} x\leq 1$.

και τελικά το ζητούμενο είναι το σύνολο $(0,1]\ni x$.

Γ1 Έστω x_0 το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η:

$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$, κι αφού περνά απ'το σημείο $(0,k)$,

το ζητούμενο είναι ισοδύναμο με το να έχει 2 ακριβώς λύσεις στο $\mathbb{R}$

η εξίσωση $k-4+x_0^2=2x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2=k-4$.

Ζητώ $k-4>0 \Leftrightarrow k>4$. Τότε δίνεται δύο ακριβώς εφαπτόμενες,

στα σημεία $x_{0_1}=\sqrt{k-4}$ και $x_{0_2}=-\sqrt{k-4}$.

Για να είναι κάθετες, πρέπει $f'(x_{0_1})\cdot f'(x_{0_2})=-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{k-4}\cdot 2\sqrt{k-4}=-1 \Leftrightarrow k-4=\frac{1}{4} \Leftrightarrow k=\frac{17}{4}$.

Γ2 i) Η εφαπτομένη της C_f στο A είναι: $y-f(a)=f'(a)(x-a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y-4+a^2=-2a(x-a) \Leftrightarrow y=-2ax+a^2+4$ (ε).

Η (ε) τέμνει τον xx' όταν $y=0 \Leftrightarrow -2ax+a^2+4=0 \Leftrightarrow x=\frac{a^2+4}{2a}$

δηλ. στο $\Gamma\left(\frac{a^2+4}{2a},0\right)$. Άρα η τετμημένη του Γ είναι

$x(t)=\frac{a^2(t)+4}{2a(t)}$, με $a'(t)=\frac{1}{2}$ cm/s, και όταν $y(t_0)=3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4-a^2(t_0)=3 \Rightarrow a(t_0)=1$.

Άρα $x'(t)=\frac{1}{2}\,\frac{2a^2(t)\cdot a'(t)-a'(t)(a^2(t)+4)}{a^2(t)}=\frac{1}{2}\,\frac{a^2(t)\cdot a'(t)-4a'(t)}{a^2(t)}$

και για $t=t_0$, $x'(t_0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1\cdot 1/2-4\cdot 1/2}{1} \Rightarrow x'(t_0)=-\frac{3}{4}$ cm/s.