

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΤΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε πρώτου βαθμού πολυώνυμο για το οποίο ισχύει: $P(P(x)) = 9x - 4$ (Απ: $P(x) = 3x - 1$)
2. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει η σχέση: $P(x)(x+3) = x^3 - 7x + 6$ (Απ.: $x^2 - 3x + 2$)
3. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (a^2 - 2a - 3)x^4 + (a^2 + a)x^3 + ax^2 - (a+1)x + 5$
 - i. Να βρείτε την τιμή του a για την οποία το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού. (Απ: $a=3$)
 - ii. Για την τιμή του a που βρήκατε στο (i) , να δείξετε ότι το $(x+1)$ είναι παράγοντας του $P(x)$.
4. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = k^2x^3 - 3kx^2 + 2kx - 2, k \in \mathbb{R}$.
 - i. Να βρείτε για ποιες τιμές του k το 1 είναι ρίζα του $P(x)$. (Απ: $k=-1$ ή $k=2$)
 - ii. Για τις τιμές του k που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε το μικρότερο υπόλοιπο που μπορεί να έχει η διαίρεση του $Q(x) = k^3x^{60} - k^2x^{30} + 5$ με το $(x+1)$. (Ελάχιστο υπόλοιπο 3)
5. i. Αν ο αριθμός 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(2x-5)$ έχει ρίζα τον αριθμό 4.
 - ii. Να βρείτε μια ρίζα για την εξίσωση: $Q^2(3x - 5) + P^2(5x - 12) = 0$
6. Αν η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το $(x-3)$ έχει υπόλοιπο -6 , ενώ η διαίρεση του $P(x)$ με το $(x+1)$ δίνει υπόλοιπο 2, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο:
 $(x^2 - 2x - 3)$ (Απ: $\nu(x) = -2x$)
7. Να βρείτε τις τιμές των a και β , ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + \beta - 2$, διαιρούμενο με (x^2+1) να αφήνει υπόλοιπο ίσο με $(6x+5)$. (Απ: $a=0$ και $\beta=7$)
8. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a και β για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + (a-2)x^2 - (\beta+1)x + 2$, έχει παράγοντα το $Q(x) = (x+1)^2 + 1$. (Απ: $a = 5, \beta = -5$)
9. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x - 2$. Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x^3-2)$.
(Απ: $x = 0$ ή $x = \sqrt[3]{3}$)
10. Για ένα πολυώνυμο $P(x)$ ισχύουν οι σχέσεις: $P(0) = P(2) = 5$. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ παίρνει τη μορφή: $P(x) = x(x-2) \cdot Q(x) + 5$
11. α. Να βρείτε τις τιμές των a και β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + (\beta - 2)x^2 - (a + 6)x + 6$ να έχει παράγοντα το πολυώνυμο $(x^2 - 3x + 2)$. (Απ: $a=1, \beta=2$)
β. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) < 0$ (Απ: $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 2)$)
12. α. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = (a+2)x^3 - (a-1)x^2 - 5x + 12a$, με το $(x+2)$ είναι ανεξάρτητο του a .
β. Να βρείτε πολυώνυμο $Q(x)$ ώστε $P(x)+2=(x+2)Q(x)$.
γ. Να βρείτε την τιμή του a ώστε το $Q(x)=x^2-5$ (Απ: $a=-1$)

13. Να βρείτε - αν υπάρχουν - τιμές για τα A, B, Γ, Δ ώστε οι παρακάτω ισότητες να ισχύουν για κάθε επιτρεπτή τιμή του x .

$$\alpha. \frac{7-3x}{(x-3)(2-x)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2} \quad (A=2, B=1) \quad \beta. \frac{x^2-3x+1}{(x-1)(x-2)} = \frac{\Gamma x}{x-1} + \frac{\Delta}{x-2} \quad (\Gamma=1, \Delta=-1)$$

14. α. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + (\alpha+1)x + 3 - \beta$ να έχει παράγοντα τον όρο $(x+2)^2$. (Απ: $\alpha = -2$ και $\beta = 15$)

β. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 8$ να έχει παράγοντα το $(x^2 + \alpha x + \beta)$. (Απ: $\alpha = -2, \beta = 4$)

15. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2 + \alpha x + \beta$.

α. Να βρείτε τα α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει διπλή ρίζα τον αριθμό 2.

β. Για τις τιμές των α, β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να δείξετε ότι τελικά το $P(x)$ έχει παράγοντα τον όρο $(x-2)^3$. (Απ: $\alpha = 28, \beta = -24$)

16. Αν για το πολυώνυμο $P(x)$ γνωρίζουμε ότι είναι τουλάχιστον δευτέρου βαθμού και πως διαιρούμενο με $(x+1)$ αφήνει υπόλοιπο (-2) , ενώ διαιρούμενο με $(x+2)$ αφήνει υπόλοιπο (-1) , να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το πολυώνυμο $(x^2 + 3x + 2)$.

17. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 + 2ax^3 + 5x^2 + \beta x + \alpha + 1, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$. Αν γνωρίζετε ότι έχει παράγοντα το $(2x^2 + 3)$, να υπολογίσετε τα α, β και να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$. (Απ: $\alpha = 2, \beta = 6$, διπλή ρίζα το -1)

18. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 7x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 12, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$. Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $(x^2 - 1)$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$. (Απ: $\alpha = 11, \beta = 7$)

19. Δίνονται τα πολυώνυμα: $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + \alpha x + \beta, \quad Q(x) = x^2 - x - 2$.

Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $Q(x)$, να βρείτε τις τιμές των α, β και να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Απ: $\alpha = -3, \beta = 2, x \in (-1, 0) \cup (\frac{1}{2}, 2)$)

20. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$i. 2 + \sqrt{3x+1} = \sqrt{7x+1} \quad ii. \sqrt{22-2x} = 2 + \sqrt{10-x} \quad iii. \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = 5$$

$$iv. 2x^2 = \sqrt{2x^2 - 5x + 1} + 5x + 1 \quad v. \sqrt{\frac{x-1}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{5}{2}$$

21. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$1. (2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0 \quad 2. 2\eta\mu^3 2x - 5\sigma\nu^2 2x + 5\eta\mu 2x + 7 = 0$$

22. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$1. x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0 \quad 2. x^3 + 3x \geq 5x^2 - 9 \quad 3. 3x^4 - x^3 - 9x^2 + 9x - 2 \leq 0$$

$$4. x^4 - 3x^3 + 6x \leq 4 \quad 5. x^4(3x - 4) \geq 10x^2(2x - 1) + 6 - 17x$$

23. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$1. x^6 - 9x^3 + 8 = 0 \quad 2. (x^2 + 3x - 2)^6 - 9(x^2 + 3x - 2)^3 + 8 = 0$$

$$3. (x+2)^8 - 3(x+2)^4 - 4 = 0 \quad 4. (x^3 - 11x + 12)^4 - 3(x^3 - 11x + 12)^2 - 4 = 0$$

24. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$1. \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} < 1 \quad 2. \frac{x^3 + 2x - 4}{x - 2} \geq x^2 \quad 3. \frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} \leq \frac{2}{x^2 - 1}$$