ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (6ΓΕΝ-315)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ και f΄(x)=0 για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat. Μπορούμε με βάση το θεώρημα αυτό να ισχυριστούμε ότι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε κάθε σημείο x_0 στο οποίο παρουσιάζει ακρότατο;

Α3. Να σημειώσετε Σ ή Λ δίπλα σε κάθε μία από τις προτάσεις:

1. Είναι $\int_a^\beta f(x)dx > 0 \Leftrightarrow a > \beta.$(f συνεχής, γνήσια αύξουσα στο R).
2. Αν f γνήσια μονότονη στο [α,β] ισχύει ότι: $\max(f(x)) = f(a)$ $ή$ $f(\beta)$
3. Μια συνάρτηση ορισμένη στο R, η οποία δεν είναι 1-1 , δέχεται μία τουλάχιστον οριζόντια εφαπτομένη.
4. Αν $F(x) = \int_a^x (\int_b^u f(t)dt)du,\ f\ \ συνεχής\ στο\ [\alpha,\beta],\ x \in [\alpha,\beta],$ τότε η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή πρώτη παράγωγο.
5. Υπάρχει ακριβώς ένας κύκλος ο οποίος διέρχεται από τις εικόνες των μιγαδικών $z, \bar{z}, -z, -\bar{z}$, με $z \neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z και w για τους οποίους ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$|iz+8| = 2|2iz+1|$ και $(w+1)i = z(w-1)$.

Β1. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μιγαδικών z και w.

Β2. Να βρείτε την μέγιστη τιμή του |z-w| καθώς και τους μιγαδικούς για τους οποίους η απόσταση αυτή παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Β3. Αν οι μιγαδικοί z_1 , z_2 ανήκουν σε κύκλο με κέντρο (0,0) και ακτίνα 2 και ισχύει για αυτούς ότι $|z_1 + xz_2| > \sqrt{3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|Re(z_1\overline{z_2})| < 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f , για την οποία ισχύει η σχέση:

$f'(x) + 1 = 2x(f(x) + x)$ και $f(0) = 1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x$.

Γ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της (1, f(1)).

Γ3. Να αποδείξετε ότι $e^{x^2-1} \geq 2x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x}$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(-\infty,1) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \int_0^x e^{f(x-t)}dt$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = -\ln(1-x),\ x<1$.

Δ2. Να βρείτε την κυρτότητα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν E(t) του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο (0,0) και την ευθεία x=t όπου 0<t<1 και να υπολογίσετε το $\lim_{t\to 1^-} E(t)$

Δ4. Αν α<1, να αποδείξετε ότι: $2\int_a^{a-2} f(t)dt < \int_a^{a-4} f(t)dt$.

Χρόνος επίλυσης: 3h.

ΒΑΘΜΟΛΟΓΗΣΗ:

A1	A2	A3	B1	B2	B3	Γ1	Γ2	Γ3	Γ4	Δ1	Δ2	Δ3	Δ4
10	5	10	9	8	8	7	4	6	8	6	6	4+2	7