

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ.  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)**

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 12 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2013**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

**Θ Ε Μ Α Α**

**Α 1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x)=0$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**Μονάδες 7**

**Α 2.** Πότε μία συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1;

**Μονάδες 4**

**Α 3.** Πότε μία συνάρτηση  $f$  λέγεται παραγωγίσιμη σ'ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**Α 4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

## ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- α)** Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.
- β)** Μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού το  $A$  λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  ολικό ελάχιστο, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$
- γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη και συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  έχει ρίζα  $x_0 \in (a, \beta)$ , τότε ισχύει πάντα  $f(a)f(\beta) < 0$
- δ)** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x, a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = a^x \ln a$
- ε)** Αν η  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\alpha} f(x) dx$

### Μονάδες 10

#### Θ Ε Μ Α Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$\left| \frac{z-2}{\bar{z}+2} \right| = 1 \quad (1)$$

$$\left| \frac{w-i^{2013}}{\bar{w}+2i} \right| = 1 \quad (2)$$

με  $z \neq -2, w \neq 2i$

**Β 1.** Να αποδείξετε ότι ο  $z$  κινείται στον άξονα των φανταστικών αριθμών.

### Μονάδες 6

ΤΕΛΟΣ 2ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

## ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**B 2.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο είναι μια ευθεία παράλληλη στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

**Μονάδες 6**

**B 3.** Αν επιπλέον ισχύει ότι  $|z| = \operatorname{Re}(w) \neq \frac{3}{2}$  να βρείτε την ελάχιστη απόσταση των εικόνων των  $z$  και  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο καθώς και τις εικόνες των  $z$  και  $w$  που αντιστοιχούν στην ελάχιστη αυτή απόσταση.

**Μονάδες 7**

**B 4.** Για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z, w$  που επαληθεύουν τις σχέσεις (1), (2) και  $\operatorname{Im}(z) > 0$  να αποδείξετε ότι:

$$|z+w|^2 - 3|z| > 2$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x-1} \ln x, x > 0$

**Γ 1.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 6**

**Γ 2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[e, \infty)$ .

**Μονάδες 6**

**Γ 3.** Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x^2+1)(x^2-5x+6)}{\ln(x^2+1)}, x \in \mathbb{R}^*$

και ότι υπάρχουν  $\alpha, \beta$  με  $0 < \alpha < 1, \beta > 1$ , ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

$$x^2 - 5x + 6 \geq e^{a^2-x^2}(a^2 - 5a + 6) \quad (1) \text{ για κάθε } 0 < x < 1$$

$$e^{x^2-\beta^2}(x^2 - 5x + 6) + 5\beta - 6 \leq \beta^2 \quad (2) \text{ για κάθε } x > 1$$

να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιος, ώστε  $g''(\xi) = 0$

**Μονάδες 7**

**Γ 4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x) = \frac{f(x)(x^2-1)}{\ln x}, x > 0, x \neq 1$ , την ευθεία  $(\varepsilon)$ :  $y = 7ex - 11e$  και τις ευθείες  $x = 3, x = 4$

**Μονάδες 6**

### **ΘΕΜΑ Δ**

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) < 0, x \in \mathbb{R}$ ,  $f(1) < 0$  και μία συνάρτηση  $g$  συνεχής και περιττή στο  $\mathbb{R}$

**Δ 1. i)** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma v v x \cdot f(f(x)) dx \geq f(f(0))$

**Μονάδες 4**

ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow \kappa} \frac{1}{x-\kappa} \int_{-x}^x g(t) dt$  ( $\kappa \in \mathbb{R}$ )

**Μονάδες 4**

**Δ 2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [\alpha, \beta]$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$ ) τέτοιος,

ώστε:  $f(\xi) \int_{\xi}^{\beta} g(t) dt = g(\xi) \int_{\alpha}^{\xi} f(t) dt$

**Μονάδες 6**

**Δ 3.** Αν υπάρχει  $\eta \in [a, \beta]$  τέτοιος, ώστε να ισχύει  $\int_a^{\eta} f(x) dx = \int_a^{\eta} g(x) dx$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $c \in [a, \beta]$  τέτοιος, ώστε  $f(c) = g(c)$

**Μονάδες 6**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

## ΑΡΧΗ 5ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ – Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Δ 4.** Αν θεωρήσουμε τις συναρτήσεις  $G(x) = \int_1^x f(u) \ln \frac{x}{u} du$  και

$$H(x) = \int_1^x \left( \int_1^u \frac{1}{t} f(t) dt \right) du, x > 0, u > 0, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

i) Οι συναρτήσεις  $G$  και  $H$  είναι παραγωγίσιμες και  $G(x) = H(x), x > 0$   
**Μονάδες 3**

ii) Οι συναρτήσεις  $G'(x), H'(x)$  είναι γνησίως φθίνουσες στο διάστημα  $(1, \infty)$ .

**Μονάδες 2**

### Ο ΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμο σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμία άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μιολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι **αποδεκτή**.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 1 ώρα μετά από την διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**